

الأعمال الموجهة (1)

مسألة:

I- تنتج مؤسسة صناعية المنتج x والمنتج y في نفس الوقت، وتستعمل من أجل معالجة كل صنف الورشة A في مرحلة أولى ثم الورشة B في مرحلة ثانية، وأخيرا الورشة C في مرحلة ثالثة.

وتوفرت لهدى هذه المؤسسة العناصر التقديرية التالية، المتعلقة بهذا النشاط لشهر جانفي من السنة القادمة (ن+1):

شروط عملية الإنتاج:

الورشات	الوقت اللازم لمعالجة كل وحدة من المنتج x في كل ورشة	الوقت اللازم لمعالجة كل وحدة من المنتج y في كل ورشة	الطاقة الإنتاجية المتاحة لكل ورشة
A	20 دقيقة	25 دقيقة	600 ساعة
B	20 دقيقة	30 دقيقة	750 ساعة
C	15 دقيقة	15 دقيقة	400 ساعة

معطيات المحاسبة التحليلية:

- سعر بيع كل وحدة من المنتج $x = 500$ دج

- سعر بيع كل وحدة من المنتج $y = 700$ دج

- التكلفة المتغيرة لكل وحدة من المنتج x : 350 دج

- التكلفة المتغيرة لكل وحدة من المنتج y : 500 دج

فرص أو إمكانيات البيع (الكميات المتوقعة بيعها):

- بالنسبة للمنتج : 1000 وحدة،

- بالنسبة للمنتج : 700 وحدة.

فإذا علمت أن هذه المؤسسة تبحث عن تعظيم الهامش على التكاليف المتغيرة:

المطلوب: (باستعمال السامبالكس)

- 1- اطرّح الصيغة القانونية (النظامية) للمسألة الخطية،
- 2- اطرّح الصيغة النموذجية (القياسية) للمسألة الخطية،
- 3- قدم جدول الحل الأساسي الأولي وشرحه،
- 4- قدر البرنامج الأمثل للانتاج (مع شرح كل الحلول الممكنة، إلى غاية الحل الأمثل)

II- إذا كانت هذه المؤسسة تتوفر على العناصر التقديرية التالية، أيضا:

- الكمية المخزنة من المنتج x ، في بداية جانفي من السنة "ن+1" : 200 وحدة،
- الكمية المخزنة من المنتج y ، في بداية جانفي من السنة "ن+1" : 100 وحدة،

-المطلوب:

تقديم الموازنة التقديرية للانتاج، الخاصة بشهر جانفي من السنة "ن+1"، بالكمية وموزعة حسب المنتج x والمنتج y .

الحل:

-I

1-الصيغة القانونية للمسألة الخطية (أو البرنامج الخطي):

-الطاقة الانتاجية المتاحة للورشة = 600 ساعة = 36000 دقيقة

-الطاقة الانتاجية المتاحة للورشة = 750 ساعة = 45000 دقيقة

-الطاقة الانتاجية المتاحة للورشة = 400 ساعة = 24000 دقيقة

-الهامش على التكلفة المتغيرة لكل وحدة من المنتج x =

500 دج - 350 دج = 150 دج

-الهامش على التكلفة المتغيرة لكل وحدة من المنتج y =

700 دج - 500 دج = 200 دج

ومنه:

قيد الطاقة الإنتاجية للورشة A $\rightarrow 20x + 25y \leq 36000$

قيد الطاقة الإنتاجية للورشة B $\rightarrow 20x + 30y \leq 45000$

قيد الطاقة الإنتاجية للورشة C $\rightarrow 15x + 15y \leq 24000$

قيد بيع المنتج x $\rightarrow 1x \leq 1000$

قيد بيع المنتج y $\rightarrow 1y \leq 700$

$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow$ قيودا (أو شرطا) عدم سلبية x و y

$$M = 150x + 200y \longrightarrow \text{الدالة الإقتصادية أو دالة الهدف، للتعظيم}$$

2- الصيغة النموذجية للمسألة الخطية (أو البرنامج الخطي):

ننتقل من المتراجحات (الصيغة القانونية) إلى المعادلات مع إدخال متغيرات الفروق، كالتالي:

$$20x + 25y + 1e_1 = 36000 \text{ دقيقة}$$

$$20x + 30y + 1e_2 = 45000 \text{ دقيقة}$$

$$15x + 15y + 1e_3 = 24000 \text{ دقيقة}$$

$$1x + 1e_4 = 1000 \text{ وحدة}$$

$$1y + 1e_5 = 700 \text{ وحدة}$$

$$M = 150x + 200y$$

ملاحظة:

x: متغير هيكلي (منتوج)،

y: متغير هيكلي (منتوج)،

e_1 : متغير الفرق الذي يعبر عن الطاقة الإنتاجية للورشة (A) التي قد تبقى غير مستغلة (عاطلة، راكدة) في حل معين،

e_2 : متغير الفرق الذي يعبر عن الطاقة الإنتاجية للورشة (B) التي قد تبقى غير مستغلة (عاطلة، راكدة) في حل معين،

e_3 : متغير الفرق الذي يعبر عن الطاقة الإنتاجية للورشة (C) التي قد تبقى غير مستغلة (عاطلة، راكدة) في حل معين،

e_4 : متغير الفرق الذي يعبر عن امكانيات (أو فرص) بيع x ، التي قد تبقى غير مستغلة في حل معين،

e_5 : متغير الفرق الذي يعبر عن امكانيات (أو فرص) بيع y ، التي قد تبقى غير مستغلة في حل معين.

3- جدول الحل الأساسي الأولي:

لتسهيل إعداد الجدول الأول ندخل كل متغيرات الفروق والمتغيرات الهيكلية على كل القيود ودالة الهدف في

الصيغة النموذجية، بإضافة شروط الحل الأساسي الأولي كالتالي:

20x	+25y	+1e ₁	+0e ₂	+0e ₃	+0e ₄	+0e ₅	=36000 (>)
20x	+30y	+0e ₁	+1e ₂	+0e ₃	+0e ₄	+0e ₅	=45000 (>)
15x	+15y	+0e ₁	+0e ₂	+1e ₃	+0e ₄	+0e ₅	=24000 (>)
1x	+0y	+0e ₁	+0e ₂	+0e ₃	+1e ₄	+0e ₅	=1000 (و)
0x	+1y	+0e ₁	+0e ₂	+0e ₃	+0e ₄	+1e ₅	=700 (و)
M=150x	+200y	+0e ₁	+0e ₂	+0e ₃	+0e ₄	+0e ₅	=0 (دج)

ملاحظة:

إن المتغيرات بمعامل يساوي الصفر لا تغير شيئاً في المعادلات التي أدخلت فيها.

عمود المتغير الداخل إلى
الأساس (أو عمود الدوران)

ومنه:

الأساس	x	y	e1	e2	e3	e4	e5	k
e1	20	25	1	0	0	0	0	سا 36000
e2	20	30	0	1	0	0	0	سا 45000
e3	15	15	0	0	1	0	0	سا 24000
e4	1	0	0	0	0	1	0	و 1000
e5	0	1	0	0	0	0	1	و 700
M	150	200	0	0	0	0	0	دج 0

سطر المتغير الخارج من الأساس
(أو سطر الدوران)

شرح الحل الأساسي الأولي:

- الحل الأساسي الأولي يعني أن المؤسسة لم تنطلق بعد في الإنتاج (والبيع) ، بحيث :

- المؤسسة لم تنتج بعد أي وحدة من $x \Rightarrow$ (وحدة) $x = 0$ (خارج الأساس)

- المؤسسة لم تنتج بعد أي وحدة من $y \Rightarrow$ (وحدة) $y = 0$ (خارج الأساس)

- المؤسسة لم تحقق بعد أي دينار كربح $\Rightarrow$ (دج) $M = 0$

- كل طاقة الورشة A غير مستغلة $\Rightarrow$ (دقيقة) $e_1 = 36000$ (داخل الأساس)

- كل طاقة الورشة B غير مستغلة $\Rightarrow$ (دقيقة) $e_2 = 45000$ (داخل الأساس)

- كل طاقة الورشة C غير مستغلة $\Rightarrow$ (دقيقة) $e_3 = 24000$ (داخل الأساس)

- كل قرص بيع x غير مستغلة $\Rightarrow$ (وحدة) $e_4 = 1000$ (داخل الأساس)

- كل قرص بيع y غير مستغلة $\Rightarrow$ (وحدة) $e_5 = 700$ (داخل الأساس)

4- تقدير البرنامج الأمثل للإنتاج:

4-1- تحسين الحل الأساسي الأولي:

4-1-1- اختيار المتغير الداخل إلى الأساس والمتغير الخارج منه: (أنظر الجدول الأول، السابق)

- ان المتغير الداخل إلى الأساس هو الذي تقابله أكبر قيمة موجبة على سطر M ، (في عمود e) ،

إذن: هو y (الذي تقابله +200)

- والمتغير الخارج من الأساس هو الذي تقابله (على سطره) في عمود K أصغر قيمة موجبة يتم الحصول

عليها بعد تقسيم عمود K على عمود المتغير الداخل y ، أي:

	$\frac{K}{y}$
e1 س	$\frac{36000}{25} = 1440$
e2 س	$\frac{45000}{30} = 1500$
e3 س	$\frac{24000}{15} = 1600$
e4 س	$\frac{1000}{0+} = +\infty$
e5 س	$\frac{700}{1} = \boxed{700}$ → أصغر قيمة موجبة

وبالتالي:

- e5 هو المتغير الذي سيخرج من الأساس لكي يعوضه y ، في الجدول المقبل (الثاني) .

- والمعامل ① الذي يمثل نقطة تقاطع عمود الدوران مع سطر الدوران يسمى عنصر الدوران أو عنصر الإرتكاز : (Le Pivote) .

4-1-2- تعديل الجدول الأول: (باستعمال سطر الدوران المعدل)

بما أن المتغير y سيدخل إلى الأساس (ويصبح غير معدوم) عوضا عن e5 فإن التعديلات التي يجب إدخالها على الجدول الأول تتطلب الحصول على معاملات العمود e5 (المتغير الخارج من الأساس ويصبح بالتالي معدوما) في مكان معاملات عمود y .

وبالتالي سيشكل عمود y مع أعمدة المتغيرات الباقية في الأساس (e1 ، e2 ، e3 ، e4) مصفوفة أحادية في الجدول الثاني (وليس شرطاً أن يكون العنصر 1 مرتباً في قطر المصفوفة).

	عمود y		عمود e5	
e1 س	25	يصبح في مكان	0	
e2 س	30	يصبح في مكان	0	
e3 س	15	يصبح في مكان	0	
e4 س	0	يصبح في مكان	0	
e5 س	1	يصبح في مكان	1	سطر الدوران
M س	200	يصبح في مكان	0	

أ- تعديل سطر الدوران (e5 س):

نلاحظ أن سطر الدوران (e5 س) لا يحتاج أصلاً إلى تعديل لأن المعامل 1 في عمود e5 يقابله نفس المعامل 1 في العمود y.

إذن: س e5 المعدل هو:

س e5 المعدل	0	①	0	0	0	0	1	700
-------------	---	---	---	---	---	---	---	-----

ب- تعديل س e1:

الهدف من التعديل هو الحصول على المعامل 0 بدلاً من المعامل 25 (على س e1) في عمود y، ومن أجل ذلك نضرب س e5 المعدل في 25 ثم نقوم بطرحه من س e1 (وحاصل عملية الطرح هو س e1 المعدل).

س e1 قبل التعديل	20	25	1	0	0	0	0	36000
س e5 المعدل (25x)	0	②5	0	0	0	0	25	17500
س e1 المعدل	20	0	1	0	0	0	-25	18500

ج- تعديل س e2:

الهدف من التعديل هو الحصول على المعامل 0 بدلا من المعامل 30 (على س e2) في عمود y، ومن أجل ذلك نضرب س e5 المعدل في 30 ثم نقوم بطرحه من س e2، (وحاصل عملية الطرح هو س e2 المعدل).

	↓								
س e2 قبل التعديل	20	30	0	1	0	0	0	45000	
س e5 المعدل (30x)	0	30	0	0	0	0	30	21000	
س e2 المعدل	20	0	0	1	0	0	-30	24000	

د- تعديل س e3:

الهدف من التعديل هو الحصول على المعامل 0 بدلا من المعامل 15 (على س e3) في عمود y، ومن أجل ذلك نضرب س e5 المعدل في 15 ثم نقوم بطرحه من س e3، (وحاصل عملية الطرح هو س e3 المعدل).

	↓								
س e3 قبل التعديل	15	15	0	0	1	0	0	24000	
س e5 المعدل (15x)	0	15	0	0	0	0	15	10500	
س e3 المعدل	15	0	0	0	1	0	-15	13500	

هـ- تعديل س e4:

نلاحظ أن س e4 لا يحتاج أصلا إلى تعديل لأن المعامل 0 في عمود e5 يقابله نفس المعامل 0 في عمود y (على س e4).

إذن س e4 المعدل هو:

	↓								
س e4 المعدل	1	0	0	0	0	1	1	1000	

و- تعديل س M:

الهدف من التعديل هو الحصول على المعامل 0 بدلا من المعامل 200 (على س M) في عمود y، ومن أجل ذلك نضرب س e5 المعدل في 200 ثم نقوم بطرحه من س M، وحاصل عملية الطرح هو س M المعدل.

س M قبل التعديل	150	200	0	0	0	0	0	0
س e5 المعدل (200x)	0	200	0	0	0	0	0	200
س M المعدل	150	0	0	0	0	0	0	-200

ملاحظة:

الحل الثاني سيتكون جدولته من كل السطور المعدلة ، علما أن س e5 المعدل سيصبح س y (في الجدول الثاني).

4-1-3- عرض الجدول الثاني:

الأساس	عمود الدوران	x	y	e1	e2	e3	e4	e5	k
e1		20	0	1	0	0	0	-25	18500 >
e2		20	0	0	1	0	0	-30	24000 >
e3		15	0	0	0	1	0	-15	13500 >
e4		1	0	0	0	0	1	0	1000 >
y		0	1	0	0	0	0	1	700 و
M		150	0	0	0	0	0	-200	-140000 (دج)

ملاحظة:

- إن القيم الموجودة على سطر M ليست كلها سالبة أو معدومة (وجود قيمة موجبة +150)، وهذا يعني أن هذا الحل هو مجرد حل ممكن ولا يمكن اعتباره أمثلاً.

- إن أعمدة المعاملات الموجودة في الأساس تشكل مصفوفة أحادية، (دون س M).

شرح الحل الثاني (الممكن):

- أي أنه لا يتم إنتاج أي وحدة من $x \Rightarrow$ وحدة $x = 0$ (خارج الأساس)

- أي أنه يتم إنتاج 700 وحدة من $y \Rightarrow$ وحدة $y = 700$ (داخل الأساس)

- المؤسسة تحقق ربحاً يقدر بـ: 140000 دج = $M = -140000 /$

$$140000 \text{ دج} = M = 150(0) + 200(700) \text{ : أو}$$

- وهي الطاقة الإنتاجية للورشة A التي ستبقى غير مستغلة $\Rightarrow 18500$ دقيقة = $e1$ (موجود في الأساس)

- وهي الطاقة الإنتاجية للورشة B التي ستبقى غير مستغلة $\Rightarrow 24000$ دقيقة = $e2$ (موجود في الأساس)

- وهي الطاقة الإنتاجية للورشة C التي ستبقى غير مستغلة $\Rightarrow 13500$ دقيقة = $e3$ (موجود في الأساس)

- أي أن كل فرص بيع المنتج x ستبقى غير مستغلة $\Rightarrow$ وحدة $e4 = 1000$ (موجود داخل الأساس)

- أي أن كل فرص بيع المنتج y ستستغل $\Rightarrow$ وحدة $e5 = 0$ (موجود خارج الأساس)

4-2- تحسين الحل الثاني:

4-2-1- اختيار المتغير الداخل إلى الأساس والمتغير الخارج منه: (انظر الجدول الثاني، السابق)

- إن المتغير الداخل إلى الأساس هو الذي تقابله أكبر قيمة موجبة على سطر M ، (في عمود ٥) ،
إذن : هو x (الذي تقابله 150 +) .

- والمتغير الخارج من الأساس هو الذي تقابله (على سطره) في عمود K أصغر قيمة موجبة يتم
الحصول عليها بعد تقسيم عمود K على عمود المتغير الداخل x ، أي :

	$\frac{K}{x}$	
e1 س	$\frac{18500}{20} = 925$	
e2 س	$\frac{24000}{20} = 1200$	
e3 س	$\frac{13500}{15} = 900$	أصغر قيمة موجبة
e4 س	$\frac{1000}{1} = 1000$	
e5 س	$\frac{700}{0+} = +\infty$	

وبالتالي :

- e3 هو المتغير الذي سيخرج من الأساس لكي يعوضه x (في الجدول المقبل الثالث) .

- والمعامل (15) يمثل عنصر الإرتكاز .

4-2-2- تعديل الجدول الثاني : (باستعمال سطر الدوران المعدل)

بما أن المتغير x سيدخل إلى الأساس (ويصبح غير معدوم) عوضا عن e_3 فإن التعديلات التي يجب إدخالها على الجدول الثاني تتطلب الحصول على معاملات عمود e_3 (المتغير الخارج من الأساس ويصبح بالتالي معدوما) في مكان معاملات عمود x .

وبالتالي سيشكل عمود x مع أعمدة المتغيرات الباقية في الأساس (e_1, e_2, e_4, y) مصفوفة أحادية في الجدول الثالث.

	عمود x		عمود e_3	
e_1 س	20	يصبح في مكان	0	
e_2 س	20	يصبح في مكان	0	
e_3 س	15	يصبح في مكان	1	سطر الدوران
e_4 س	1	يصبح في مكان	0	
y س	0	يصبح في مكان	0	
M س	150	يصبح في مكان	0	

أ- تعديل سطر الدوران (e_3):

الهدف من التعديل هو الحصول على المعامل (1) بدلا من المعامل (15) على e_3 في عمود x ، ومن أجل ذلك نقوم بتقسيم س e_3 على 15 (وحاصل عملية القسمة هو س e_3 المعدل):

س e_3 قبل التعديل	15	0	0	0	1	0	-15	13500
$\frac{e_3}{15}$ س	$\frac{15}{15}$	$\frac{0}{15}$	$\frac{0}{15}$	$\frac{0}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{-15}{15}$	$\frac{13500}{15}$
س e_3 المعدل	1	0	0	0	$\frac{1}{15}$	0	-1	900

ب- تعديل س e_1 :

الهدف من التعديل هو الحصول على المعامل 0 بدلا من المعامل 20 (على س e1) في عمود x، ومن أجل ذلك نضرب س e3 المعدل في 20 ثم نقوم بطرحه من س e1، وحاصل عملية الطرح هو س e1 المعدل.

س e1 قبل التعديل	20	0	1	0	0	0	-25	18500
س e3 المعدل (20x)	20	0	0	0	$\frac{20}{15}$	0	-20	18000
س e1 المعدل	0	0	1	0	$\frac{-20}{15}$	0	-5	500

ج- تعديل س e2:

الهدف من التعديل هو الحصول على المعامل 0 بدلا من المعامل 20 (على س e2) في عمود x، ومن أجل ذلك نضرب س e3 المعدل في 20 ثم نقوم بطرحه من س e2، وحاصل عملية الطرح هو س e2 المعدل.

س e2 قبل التعديل	20	0	0	1	0	0	-30	24000
س e3 المعدل (20x)	20	0	0	0	$\frac{20}{15}$	0	-20	18000
س e2 المعدل	0	0	0	1	$\frac{-20}{15}$	0	-10	6000

د- تعديل س e4:

الهدف من التعديل هو الحصول على المعامل 0 بدلا من المعامل 1 (على س e4) في عمود x، ومن أجل ذلك نطرح مباشرة س e3 المعدل من س e4، وحاصل عملية الطرح هو س e4 المعدل.

س e4 قبل التعديل	1	0	0	0	0	1	0	1000
س e3 المعدل	1	0	0	0	$\frac{1}{15}$	0	-1	900
س e4 المعدل	0	0	0	0	$\frac{-1}{15}$	1	+1	100

هـ- تعديل س y:

نلاحظ أن س y لا يحتاج أصلا إلى تعديل لأن المعامل 0 في عمود e3 يقابله نفس المعامل 0 في العمود x

إنن: س y المعدل هو:

	↓									
س y المعدل		0	1	0	0	0	0	1		700

و- تعديل س M:

الهدف من التعديل هو الحصول على المعامل 0 بدلا من المعامل 150 (على س M) في عمود x، ومن أجل ذلك نضرب س e3 المعدل في 150 ثم نقوم بطرحه من س M (وحاصل عملية الطرح هو س M المعدل).

	↓									
س M قبل التعديل		150	0	0	0	0	0	-200		-140000
س e3 المعدل (150x)		150	0	0	0	$\frac{150}{15}$	0	-150		135000
س M المعدل		0	0	0	0	-10	0	-50		-275000

ملاحظة:

الحل الثالث سيتكون جدولته من كل السطور المعدلة ، علما أن س e3 المعدل سيصبح س x (في الجدول المقبل الثالث).

4-2-3- عرض الجدول الثالث:

الأساس		x	y	e1	e2	e3	e4	e5	k
↓	e1	0	0	1	0	$\frac{-20}{15}$	0	-5	500
	e2	0	0	0	1	$\frac{-20}{15}$	0	-10	6000
	x	1	0	0	0	$\frac{1}{15}$	0	-1	900
	e4	0	0	0	0	$\frac{-1}{15}$	1	1	100
	y	0	1	0	0	0	0	1	700
	M	0	0	0	0	-10	0	-50	-275000

ملاحظة:

- إن القيم الموجودة على سطر M سالبة أو معدومة وهذا يعني أن هذا الحل هو الأمثل.

- إن أعمدة المعاملات الموجودة في الأساس تشكل مصفوفة أحادية، (دون س M).

شرح الحل الثالث (الأمثل):

- أي أنه يتم إنتاج 900 وحدة من $x \Rightarrow$ وحدة $x = 900$ (داخل الأساس)

- أي أنه يتم إنتاج 700 وحدة من $y \Rightarrow$ وحدة $y = 700$ (داخل الأساس)

- المؤسسة تحقق ربحا أعظما يقدر بـ: 275000 دج = $M = -275000 /$

$$275000 \text{ دج} = 150(900) + 200(700) = M : \text{أو}$$

- وهي الطاقة الإنتاجية للورشة A التي ستبقى غير مستغلة $\Rightarrow 500$ دقيقة = $e1$ (موجود في الأساس)

- وهي الطاقة الإنتاجية للورشة B التي ستبقى غير مستغلة $\Rightarrow 6000$ دقيقة = $e2$ (موجود في الأساس)

- أي أن كل الطاقة الإنتاجية للورشة C ستستغل $\Rightarrow 0$ دقيقة = $e3$ (خارج الأساس)

- هي فرص بيع المنتج x التي ستبقى غير مستغلة $\Rightarrow$ وحدة $e4 = 100$ (خارج الأساس)

- أي أن كل فرص بيع المنتج y ستستغل $\Rightarrow$ وحدة $e5 = 0$ (خارج الأساس)

الموازنة التقديرية للإنتاج، الخاصة بشهر جانفي من السنة القادمة (ن+1)

(بالكمية وموزعة حسب المنتج x و المنتج y):

وق: وحدة

أصناف المنتجات	1-مخزون أول الشهر	2- الإنتاج التقديري	3- المجموع (2 + 1)	4- المبيعات التقديرية	5- مخزون آخر الشهر (المستهدف) (4-3)
المنتج x	200	900	1100	1000	100
المنتج y	100	700	800	700	100