

1. Introduction

Dans ce chapitre, on va appliquer les équations fondamentales de la dynamique ; équations de continuité et de quantité de mouvement, au cas des fluides et parfaits incompressibles.

2. Equation d'Euler et équation de Bernoulli

Partons de l'équation vectorielle de Navier Stocks régissant l'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{terme instationnaire}} + \underbrace{(\rho \vec{v} \text{grad}) \vec{v}}_{\text{terme inertiel}} = \underbrace{-\text{grad} p}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\mu \Delta \vec{v}}_{\text{force de viscosité}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{force de volume}}$$

Du fait que l'écoulement est permanent et le fluide est parfait, les termes instationnaires et de viscosité sont nuls.

Si la direction z est orientée verticalement vers le haut, alors on peut écrire

$$\vec{g} = -g\vec{k} \Rightarrow \rho \vec{g} = -\vec{\nabla}(\rho g z)$$

D'autre part, en utilisant la relation vectorielle suivante

$$(\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

Par conséquent

$$\rho (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla}(\rho g z)$$

Ce qui donne l'équation d'Euler

$$\frac{\rho}{2} \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} p + \vec{\nabla}(\rho g z) = \vec{v} \wedge \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})}_{2\vec{\Omega}}$$

Cas d'un écoulement irrotationnel

Si l'écoulement est irrotationnel le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ est nul et l'équation d'Euler prend la forme suivante

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z \right) = \vec{0}$$

d'où on tire l'équation de Bernoulli

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = Cte$$

qui est valable en tout point de l'écoulement irrotationnel.

Cas d'un écoulement rotationnel

Reprenons l'équation d'Euler sous la forme suivante

$$\rho(\vec{v} \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}(\rho g z)$$

Le long de la ligne de courant, dans le repère de Frenet, le vecteur de vitesse s'exprime

$$\vec{v} = v\vec{e}_t$$

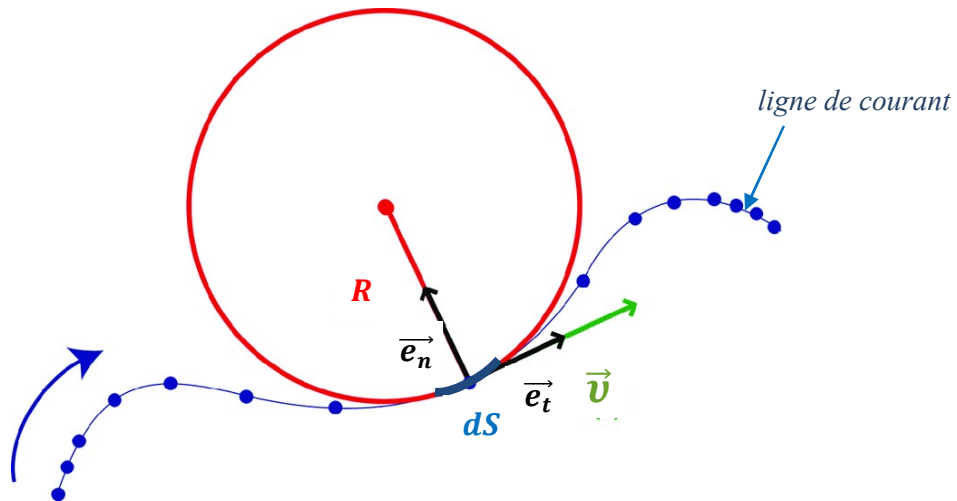


Figure 1 : Vecteur de vitesse dans la base de Frenet et la partie inertielle s'écrit comme suit

$$\rho(\vec{v} \vec{\nabla})\vec{v} = \rho \left[v\vec{e}_t \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial s}\vec{e}_t + \frac{\partial}{\partial n}\vec{e}_n \right)}_{\vec{\nabla}} \right] v\vec{e}_t = \rho v \frac{\partial}{\partial s} (v\vec{e}_t)$$

ce qui résulte en

$$\rho v \frac{\partial}{\partial s} (v\vec{e}_t) = \rho v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_t + \rho v^2 \frac{\partial \vec{e}_t}{\frac{\partial s}{R \frac{\partial \theta}{\partial s}}} = \rho v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_t + \rho \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$$

où S est l'abscisse curviligne et R est son rayon de courbure.

Après substitution du terme inertielle dans l'équation d'Euler et projection suivant les directions tangentielle et normale, on obtient

$$\begin{cases} \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \\ \rho \frac{v^2}{R} = -\frac{\partial p^*}{\partial n} \end{cases}$$

où p^* représente la pression motrice.

La projection tangentielle, c'est-à-dire **le long d'une même ligne de courant**, se réécrit comme suit

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = Cte$$

Tandis que la projection normale à la ligne de courant $\rho \frac{v^2}{R}$ représente la force centrifuge générée de la courbure de l'écoulement.

3. Théorème d'Euler

Introduction

L'équation de Bernoulli est d'une utilisation trop limitée. Il ne permet pas d'exprimer les actions mécaniques pouvant apparaître entre le fluide et des solides, D'où la nécessité d'introduire un deuxième théorème. Dans ce qui suit on considère le fluide parfait et incompressible et l'écoulement permanent.

Théorème d'Euler

On établit le théorème d'Euler à partir de la relation fondamentale de dynamique

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d \iiint \rho \vec{v} \cdot dV}{dt} = \sum \vec{F}$$

où \vec{p} est la quantité de mouvement et $\sum \vec{F}$ est la somme des forces extérieures appliquée au système. Le bilan de quantité de mouvement $\iiint \rho \vec{v} \cdot dV$ d'un système permet de calculer des forces ou des puissances mécaniques.

En considérant un volume de contrôle imaginaire fixe délimité par une frontière $\partial\Omega$, le bilan s'écrit de la manière suivante

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \vec{v} \cdot dV = m\vec{g} + \iint_{\partial\Omega} \sigma \vec{n} ds + \vec{F}_{ext} - \iint_{\partial\Omega} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$$

Lorsque la frontière imaginaire fixe $\partial\Omega$ du système peut être considérée comme l'union de la frontière $\partial\Omega_s$ entre le fluide interne et les parois solides et de la frontière $\partial\Omega_f$ entre le fluide interne et le fluide externe, on obtient

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \vec{v} \cdot dV = m\vec{g} + \underbrace{\iint_{\partial\Omega_s} \sigma \vec{n} ds}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\iint_{\partial\Omega_f} \sigma \vec{n} ds}_{\textcircled{2}} + \vec{F}_{ext} - \underbrace{\iint_{\partial\Omega_s} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\iint_{\partial\Omega_f} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds}_{\textcircled{4}}$$

Terme ① : la force $\vec{F}_{s/f}$ que les parois solides exercent sur le fluide contenu dans le système (la grandeur que l'on cherche à calculer).

Terme ② : comme $\sigma = \tau - pI$ et la contrainte de cisaillement τ est souvent négligeable par rapport à la pression ; ce terme se simplifie en une force de pression $p\vec{dS}$.

Terme ③ : ce terme est nul car les parois sont imperméables c.à.d. la vitesse du fluide à leur contact est nulle et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Ainsi l'expression du bilan de quantité de mouvement est

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \vec{v} \cdot dV = m\vec{g} + \vec{F}_{s/f} + \vec{F}_{ext} - \iint_{\partial\Omega_f} p\vec{n}ds - \iint_{\partial\Omega_f} \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})ds$$

Dans le cas du régime stationnaire ($\frac{d}{dt} \iiint \rho \vec{v} \cdot dV = 0$), la résultante $\vec{F}_{tot/f}$ des forces qui s'appliquent sur le fluide (gravité + parois solides + pression du fluide + force extérieure) est égale et opposée au débit de quantité de mouvement entrant dans le système. Il s'ensuit que l'équation précédente se simplifie et prend la forme suivante, appelée théorème d'Euler :

$$\iint_{\partial\Omega_f} \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})ds = m\vec{g} + \vec{F}_{s/f} + \vec{F}_{ext} - \iint_{\partial\Omega_f} p\vec{n}ds$$

4. Applications de l'équation de Bernoulli

a. Tube de Venturi

La mesure du débit volumique d'un fluide s'écoulant dans une conduite peut être effectuée au moyen d'une tuyère ou tube de Venturi. Ce tube de diamètre intérieur D est constitué d'un convergent relié à un divergent par l'intermédiaire d'un col de diamètre d .

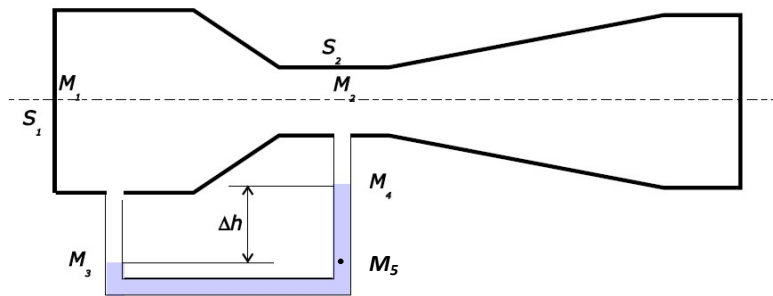


Figure 2 : Tube de Venturi

Deux prises de pression statique p_3 , p_4 à l'entrée du convergent et au col, sont reliées par un tube en U contenant un liquide manométrique de masse volumique ρ_m . Pour un débit volumique q_v du fluide en écoulement de masse volumique ρ , on relève une dénivellation Δh dans le tube en U.

Calcul de vitesse

On applique le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 2

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2 + \rho g z_2$$

Où z_1 et z_2 sont les côtes respectives de la ligne de courant choisie passant par les sections S_1 et S_2 et $z_1 = z_2$.

De la loi de l'hydrostatique on peut écrire

$$p_3 = p_1 + \rho g(z_1 - z_3) \Rightarrow p_1 = p_3 - \rho g(z_1 - z_3)$$

$$p_5 = p_2 + \rho g(z_2 - z_4) + \rho_m g(z_4 - z_5) \Rightarrow p_2 = p_5 - \rho g(z_2 - z_4) - \rho_m g \Delta h$$

Comme $p_3 = p_5$, on peut écrire

$$p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_4) + \rho_m g \Delta h - \rho g(z_1 - z_3)$$

Qui se réécrit

$$p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho)g\Delta h$$

L'équation de Bernoulli devient

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \Rightarrow p_2 - p_1 = (\rho_m - \rho)g\Delta h = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

Du principe de conservation du débit on écrit

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_1 = \frac{v_2 S_2}{S_1}$$

D'où on tire

$$(\rho_m - \rho)g\Delta h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]$$

Ainsi, la vitesse du fluide au point 2 est

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)g\Delta h}{\rho \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}}$$

Calcul du débit volumique

Le débit de la conduite est ainsi

$$q_v = S_2 v_2 = S_2 \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)g\Delta h}{\rho \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}}$$

b. Tube de Pitot

Le tube de Pitot est un instrument de mesure de vitesse locale d'un gaz ou d'un liquide. Il est constitué de deux tubes coudés concentriques dont les orifices, en communication avec le fluide dont on veut mesurer la vitesse, sont disposés comme suit

- Le tube extérieur s'ouvre perpendiculairement A à l'écoulement du fluide. La pression dans ce tube est par conséquent égale à la pression ambiante ou pression statique ;
- Le tube intérieur est parallèle à l'écoulement du fluide, et est ouvert en son bout B , face au flux. La pression dans ce dernier est par conséquent la pression totale, somme de la pression statique et de la pression dynamique.

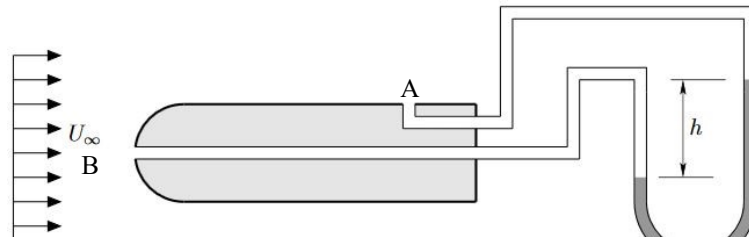


Figure 3 : Tube de Pitot

Le calcul de vitesse du fluide s'effectue par application du théorème de Bernoulli. Dans le cas de l'air il est possible de négliger la partie potentielle " $\rho g z$ " et avoir ainsi une relation directe entre la vitesse U_∞ et la pression dynamique $p_t - p_s$ (p_t est la pression totale et p_s est statique) qu'on mesure avec le manomètre.

$$\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 + p_s = p_t \Rightarrow U_\infty = \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho}}$$

c. Théorème de Torricelli

On considère un récipient de rayon $R(h)$ et de hauteur h_0 percé d'un orifice de rayon r contenant un liquide non visqueux de masse volumique ρ . L'orifice B est d'abord bouché pour remplir le récipient jusqu'à la hauteur h_0 . A $t=0$ on libère l'orifice et le vidage commence.

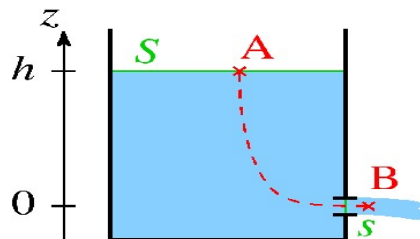


Figure 4 : Schéma du vidage d'un réservoir

1^{er} cas :

Si r est beaucoup plus petit que $R(h)$, on constate du principe de conservation du débit massique que la vitesse du fluide v en A est négligeable devant V vitesse du fluide en B .

Le théorème de Bernoulli permet d'écrire que

$$A: t = 0 \quad P_A - P_B + \rho g h_0 = \frac{1}{2} \rho V^2, \quad v^2 \ll V^2$$

Comme $P_A = P_B = P_{atm}$, on obtient

$$V = \sqrt{2gh_0}$$

2^{ème} cas :

Si r n'est pas beaucoup plus petit que $R(h)$, la vitesse du fluide en A n'est plus négligeable. L'écoulement étant incompressible et homogène, le débit volumique se conserve entre la section du réservoir $S_A(h) = S(h)$ et la section de l'orifice $S_B = s$ du tube, d'où :

$$S \cdot v = s \cdot V$$

En appliquant le théorème de Bernoulli, à un instant t , entre les point A et B on tire que

:

$$\rho gh(t) = \frac{1}{2} \rho (V^2 - v^2) \Rightarrow V = S(h) \sqrt{\frac{2gh(t)}{S(h)^2 - s^2}}$$

La vitesse d'écoulement du liquide varie avec $h(t)$.

Temps de vidage

La vitesse de la surface libre repérée par $h(t)$ est donnée par

$$v(t) = -\frac{dh(t)}{dt} = s \sqrt{\frac{2gh(t)}{S(h)^2 - s^2}}$$

Dans le cas d'un réservoir de forme **cylindrique** $S = cte$, la hauteur $h(t)$ de la surface libre est

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2S}} t \right)^2$$

d'où la durée de vidage est

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sqrt{h_0}$$

5. Théorème de Bernoulli généralisée

Cas d'un écoulement avec échange d'énergie

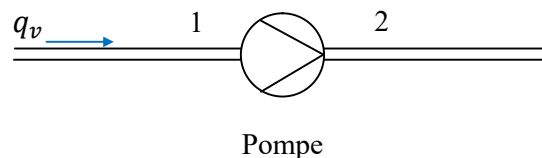
Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique, il échange de l'énergie avec cette machine : Cette puissance P échangée est

$$\frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho g} (p_2 - p_1) + (z_2 - z_1) = \frac{P}{\rho g q_v}$$

où $\frac{P}{\rho g q_v}$ est appelé hauteur manométrique. L'ajout d'énergie pourrait se faire par pompage entre les points 1 et 2, tandis qu'un exemple de retrait d'énergie pourrait se faire par extraction de chaleur (refroidissement) entre les points 1 et 2.

- $P > 0$ l'énergie est reçue P_G par me fluide comme pour le cas de la pompe.

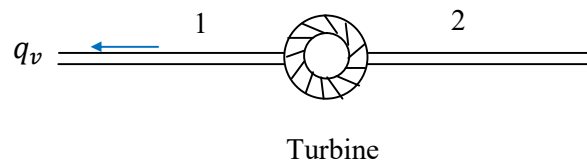
$$\frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho g} (p_2 - p_1) + (z_2 - z_1) = \frac{P}{\rho g q_v}$$



$$\eta_{mot} = \frac{P_{méc}}{P_{élec}}, \quad \eta_p = \frac{P_{hyd}}{P_{méc}}$$

$$P_{hyd} = E \times q_v$$

- $P < 0$ l'énergie est fournie P_R par me fluide comme pour le cas de la turbine.



$$\eta_{tur} = \frac{P_{méc}}{P_{hyd}}$$

Cas de frottement

Lorsque les forces de frottement interviennent une puissance est dissipée par ces forces et ce cas est appelé « pertes de charge ».

La relation générale

On applique la relation générale entre deux point 1 et 2 dont le fluide se déplaçant dans le sens 1→2 sous la forme suivant

$$\text{Pour une pompe (générateur):} \quad H_{T1} + H_{pompe} = H_{T2} + \sum_i h_i$$

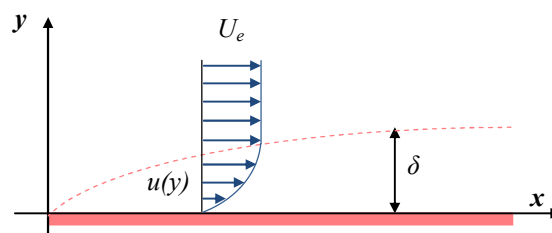
$$\text{Pour une turbine (récepteur):} \quad H_{T1} = H_{T2} + \sum_i h_i + H_{turbine}$$

où $\sum_i h_i$ représente toutes les pertes de charge entre 1 et 2. Par exemple :

$$\left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) + H_{pompe} = \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) + \sum_i h_i$$

6. Viscosité

Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi le fluide ne s'écoule pas de la même vitesse. On dit qu'il existe un profil de vitesse.



Profil de vitesse

Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement l'ensemble des particules, la courbe liant les extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse.

Le mouvement du fluide peut être considéré comme le glissement des couches de fluide les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche est une fonction de y de cette couche au plan fixe (paroi) $u = u(y)$.

Loi de Newton

Considérons deux couches du fluide distantes de dy . La force de frottement qui s'exerce entre ces deux couches s'oppose du glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse de ces couches soit du , à leur surface S et inversement proportionnelle à la distance dy .

$$F = S \cdot \tau = -\mu S \frac{du}{dy}$$

Le facteur de proportionnalité μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide. Dans le système (SI) l'unité de viscosité est **Pa.s** ou poiseuille (**PI**), $1\text{PI} = 1\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$. Dans le système (CGS) l'unité est le poise (Po) ; $1\text{PI} = 10\text{Po}$.

Il existe deux types de fluides :

Fluides newtonien qui satisfont à la loi de Newton. Ces fluides ont un coefficient de viscosité indépendant du gradient de vitesse. C'est le cas des gaz, des vapeurs et des liquides purs de faible masse molaire.

D'autre part les fluides non-newtonien. Ce sont des solutions de polymers, les gels, les boues, le sang, les peintures....etc.

Viscosité cinématique

C'est le rapport entre la viscosité dynamique μ et la masse volumique ρ . Son unité dans le système (SI) n'a pas de nom particulier : (m^2/s), tandis que dans le système (CGS) c'est le stoke (St) : $1\text{m}^2/\text{s} = 10^4\text{St}$.

Influence de la température

La viscosité des liquides diminue beaucoup lorsque la température augmente. Ainsi pour l'eau :

$$\begin{cases} \text{à } 10\text{C}^\circ: & \mu = 1,3 \times 10^{-3} \text{ PI} \\ \text{à } 20\text{C}^\circ: & \mu = 1,0 \times 10^{-3} \text{ PI} \\ \text{à } 90\text{C}^\circ: & \mu = 0,3 \times 10^{-3} \text{ PI} \end{cases}$$

Contrairement à celle des liquides, la viscosité des gaz augmente avec la température.

7. Dynamique des fluides visqueux incompressibles

Les régime des l'écoulemnt : nombre de Reynolds

Les expériences réalisé par Reynolds lors de l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique rectiligne, ont montrées l'existence de deux régimes : laminaire et turbulent.

En utilisant des fluides divers et en faisant varier le débit et le diamètre de la conduite, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds défini par

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

L'expérience montre que (pour les conduites cylindriques) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si:} & Re < 2000 & \text{le régime est laminaire} \\ \text{si:} & 2000 < Re < 3000 & \text{le régime est transitoire} \\ \text{si:} & Re > 3000 & \text{le régime est turbulent} \end{array} \right.$$

Calcul des pertes de charges

Lorsqu'on considère un écoulement d'un fluide réel, les pertes d'énergie ou comme on les appelle les pertes de charge dépendent de la forme, les dimension, la rugosité de canalisation, de la vitesse d'écoulement et de la viscosité du fluide mais de la valeur absolue de pression qui règne dans le liquide. La différence de pression $\Delta p = p_1 - p_2$ entre deux points d'un circuit hydraulique est pour origine :

- Les frottements du fluide sur la paroi interne de la canalisation, on les appelle pertes de charges linéaires (régulières).
- La résistance à l'écoulement provoquée par les accidents de parcours (coudes élargissement ou rétrécissement de la section, organes de réglage...), il sont appelé les pertes de charges accidentelle ou singulières. Elle dépendent du fluide caractérisé par ρ, μ et du canal caractérisé par D, L et k (rugosité). Ces grandeurs sont liées par vitesse moyenne de l'écoulement u ou le débit q_v et le nombre de Reynolds qui a un rôle essentiel dans le calcul des pertes de charges.

Pertes de charges singulières

Ces pertes de charges sont à peu près proportionnelles au carré de la vitesse et donc on a adapté la forme suivante d'expression

$$\Delta p = K \frac{\rho V^2}{2}, \quad \Delta h = K \frac{V^2}{2g}$$

K est appelé le coefficient de perte de charge singulière (sans dimension).

Pertes de charges linéaires

Elles sont causées par les frottement du fluide avec la paroi interne du canal. Ce type de pertes se rencontre dans le tuyaux aussi bien que dans les tuyaux rugueux. Entre deux point (1) et (2) séparés d'une longueur L , dans un tuyau de diamètre D apparaît une perte de pression Δp .

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho V^2 L}{2 D}, \quad \Delta h = \underbrace{\lambda \frac{V^2 L}{2g D}}_{\substack{\text{prte de charg} \\ \text{linéique} \\ \text{exprimé en mCF}}}, \quad J = \frac{\Delta h}{L} = \lambda \frac{V^2}{2gD} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{perte de charg} \\ \text{linéique m/m}}}$$

λ est le coefficient de perte de charge linéique.

- **Cas de l'écoulement laminaire : $Re < 2000$**

Dans ce cas le coefficient λ est fonction seulement du nombre de Re ; l'état de la surface n'intervient pas et donc λ ne dépend pas de K , ni de la nature de la tuyauterie. Il est déterminé à l'aide la loi de Darcy

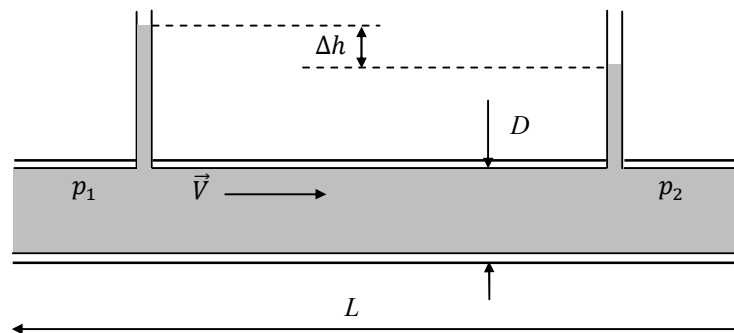
$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Il est alors clair que Δh est proportionnel à la vitesse et donc au débit, ainsi qu'à la viscosité cinématique.

Loi de poiseuille

Pour un écoulement laminaire, dans une conduite cylindrique horizontale, de longueur L , de diamètre D , le débit volumique est

$$q_v = \frac{\pi r^4}{8\mu L} (p_1 - p_2) = \frac{\pi D^4}{128\mu L} \Delta p$$



- **Cas de l'écoulement turbulent : $Re > 3000$**

Les phénomènes d'écoulement sont beaucoup plus complexes et la détermination du coefficient de perte de charge résulte des mesures expérimentales. C'est ce qui explique la diversité des formules anciennes (corrélations) qui ont été proposées pour sa détermination.

En régime turbulent l'état de surface devient plus sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds est grand. Tous les travaux ont montré l'influence de rugosité et ont s'est attaché par la suite à chercher la variation du coefficient de frottement avec le coefficient de rugosité du tuyau et le nombre de Reynolds.

La formule Colebrook est actuellement considérée comme celle qui traduit le mieux les phénomènes d'écoulement interne en régime en régime turbulent. Elle a la forme suivante

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{K}{3,7D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right)$$

L'utilisation de cette formule demanderait un calcul par approximations successives. Pour sa résolution, on doit vérifier si l'écoulement est lisse ou rugueux pour évaluer la prédominance des deux termes entre parenthèses de la relation de Colebrook. Ce sont les formules de Karman-Nikuradse écrites séparément :

- En écoulement turbulent lisse :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8 ;$$

- En écoulement turbulent rugueux :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{D}{2K} \right) + 1,735$$

Remarques

On fait souvent appel à des corrélations plus simples valables pour des cas particuliers et dans un certain domaine de Reynolds. Parmi ces formules on cite :

- Formule de Blaisus (pour des tuyaux lisses et $Re < 10^5$) :

$$\lambda = 0,316 \cdot Re^{-0,25}$$

- Formule de Nikurads ($10^6 < Re < 10^8$) :

$$\lambda = 0,0032 + 0,221 \cdot Re^{-0,237}$$

Ces formules empiriques sont utilisées pour avoir des ordres de grandeurs correctes des pertes de charge. Pour diminuer l'ensemble des pertes dans une canalisation, afin de diminuer les coûts de fonctionnement dus aux pompes, il faut :

- diminuer la longueur de la canalisation
- diminuer le nombre d'accidents sur la canalisation
- diminuer le débit de circulation
- augmenter le diamètre des canalisations
- faire circuler des fluides le moins visqueux possible
- utiliser des matériaux, pour les canalisations, de faible rugosité.

