

Chapitre 4

Calcul de sections en béton armé soumises à la flexion simple

4.1 Définition

Un élément est soumis à la flexion simple si dans toute section de cet élément, les sollicitations se réduisent à un moment fléchissant M_f et un effort tranchant T (l'effort normal $N = 0$) (Fig. 4.1).

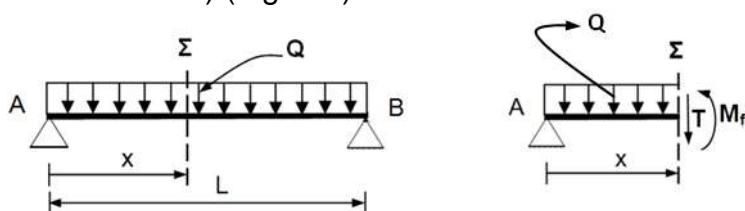


Fig. 4.1 : Schéma mécanique d'une poutre, plus le schéma d'une partie de cette poutre située à gauche d'une section considérée.

Les éléments d'une structure soumise à la flexion simple sont principalement les poutres, qu'elles soient isostatiques ou continues.

En béton armé, **l'action du moment fléchissant** conduit au dimensionnement des **acières longitudinaux** et **l'action de l'effort** tranchant conduit au dimensionnement des **acières transversaux** (cadres, épingle ou étriers).

Ces deux calculs sont menés séparément, dans ce chapitre, on présente les calculs relatifs au moment fléchissant en considérant les deux états limites (l'E.L.U et l'E.L.S), et en étudiant les sections rectangulaires et en T avec ou sans armatures comprimées.

4.2 Calcul des armatures longitudinales à l'E.L.U.

4.2.1 Hypothèses de calcul

1. Hypothèse de Navier-Bernoulli (les sections droites restent planes pendant la déformation) ;
2. Pas de glissement relatif entre l'acier et le béton ;

3. La résistance du béton en traction est négligée ;
4. La section d'acier est concentrée en son centre de gravité.
5. **Béton:** diagramme rectangulaire simplifié relatif aux déformations - contraintes en compression.
- **Acier:** diagramme bilinéaire de calcul (traction et compression).
6. **Déformations limites:** suivant la méthode des «**trois pivots**» qui impose en flexion simple d'atteindre l'un des pivots A ou B (Fig. 4.2):
 - **Pivot A:** $\varepsilon_{st} = 10\%$ et $0 \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5\%$.
 - **Pivot B:** $0 \leq \varepsilon_{st} \leq 10\%$ et $\varepsilon_{bc} = 3,5\%$.

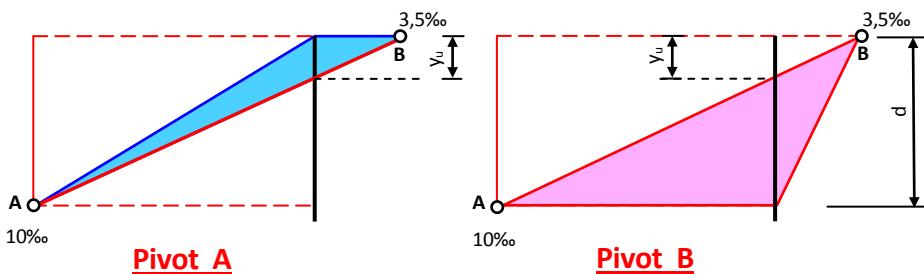


Fig. 4.2 : Diagramme des déformations limites d'une section soumise à la flexion simple

- **Positions particulières de l'axe neutre**

L'hypothèse de continuité des déformations dans la section (pas de glissement des armatures par rapport au béton) conduit à l'équation suivante :

$$\frac{y_u}{\varepsilon_{bc}} = \frac{d-y_u}{\varepsilon_{st}} \quad \dots \dots \dots (4.1)$$

De cette relation on peut déduire l'équation suivante :

$$\frac{y_u}{d} = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{bc} + \varepsilon_{st}} \quad \dots \dots \dots (4.2)$$

En posant : $\alpha_u = \frac{y_u}{d}$ (α_u : position relative de la fibre neutre par rapport à la fibre la plus comprimée), on peut écrire que :

$$\alpha_u = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{bc} + \varepsilon_{st}} \quad \dots \dots \dots (4.3)$$

Valeurs particulières de α_u

➤ Voir Fig. 4.3.

- Si la droite des déformations passe par les pivots A et B alors :

$$\alpha_u = \alpha_{AB} = \frac{3.5}{3.5+10} = 0.2591$$

- Si $\alpha_u = 0.167 \Rightarrow$ pivot A ($\varepsilon_{bc} = 2\%$ et $\varepsilon_{st} = 10\%$) ;
- Si $0 \leq \alpha_u < 0.167 \Rightarrow$ pivot A ($0 \leq \varepsilon_{bc} < 2\%$ et $\varepsilon_{st} = 10\%$) : le béton travaille mal et la section est surdimensionnée en béton;
- Si $0.167 \leq \alpha_u \leq 0.259 \Rightarrow$ pivot A ($2\% \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5\%$ et $\varepsilon_{st} = 10\%$) ;
- Si $0.259 \leq \alpha_u \leq \alpha_l \Rightarrow$ pivot B ($\varepsilon_{bc} = 3.5\%$ et $10\% \geq \varepsilon_{st} \geq \varepsilon_l$) avec :

$$\varepsilon_l = \varepsilon_e = f_e / (\gamma_s \cdot E_s) \quad \text{et} \quad \alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + (\varepsilon_l \cdot 1000)}$$

- Si $\alpha_l \leq \alpha_u \leq 1 \Rightarrow$ pivot B ($\varepsilon_{bc} = 3.5\%$ et $\varepsilon_l \geq \varepsilon_{st} \geq 0$) : l'acier travaille insuffisamment, ce qui conduit à de grandes sections d'armatures.

Conclusion : pour utiliser au mieux les caractéristiques du béton et de l'acier, il est préconisé :

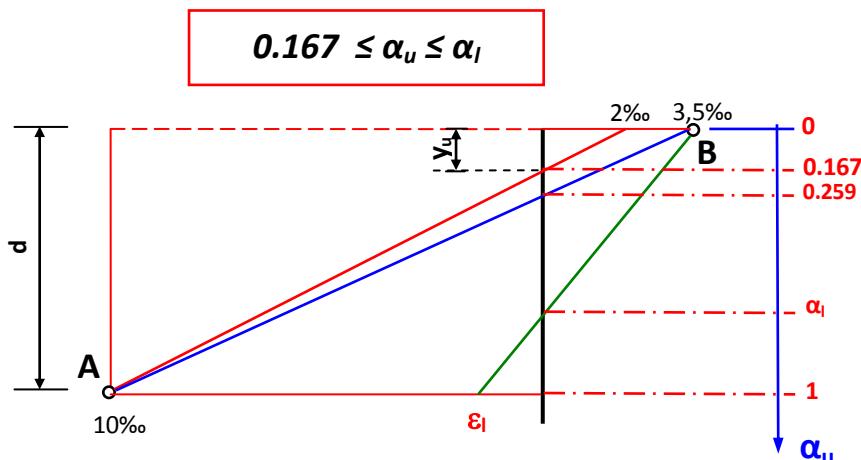


Fig. 4.3: Positions particulières de l'axe neutre

4.2.2 Section rectangulaire

4.2.2.1 Section sans aciers comprimés

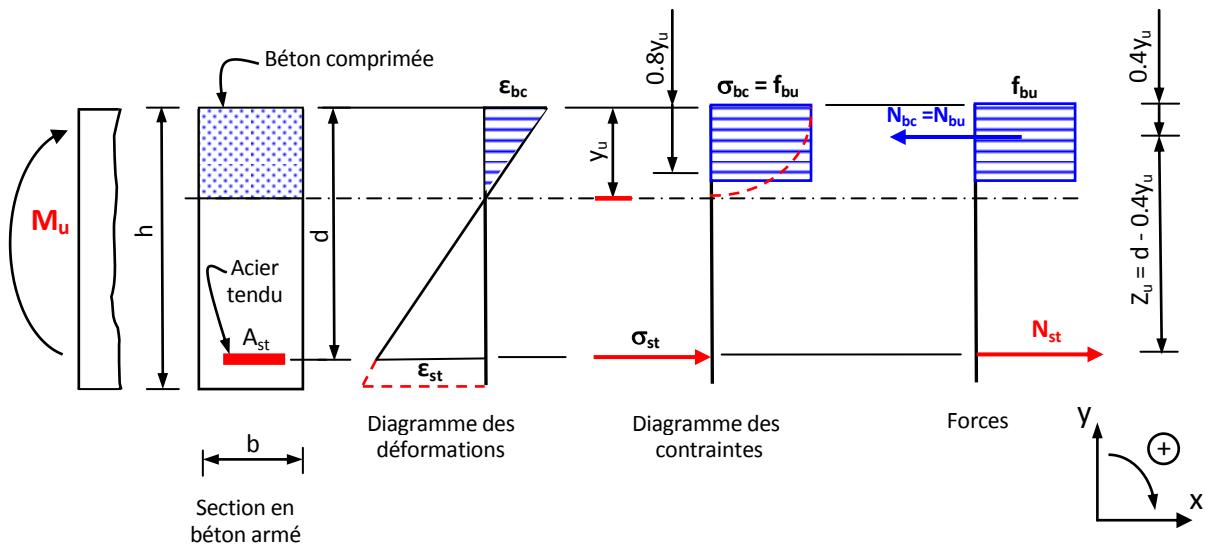


Fig. 4.4 : Diagrammes contrainte-déformation parabole-rectangle et rectangulaire simplifié dans la section de béton comprimé

Équations d'équilibre :

- Voir (Fig. 4.4)

➤ $\sum F_x = 0$

$$\Rightarrow N_{st} - N_{bc} = 0 \Rightarrow \boxed{N_{st} = N_{bc}} \quad \dots \dots \dots \quad (4.5)$$

$$\bullet N_{bc} = N_{bu} = 0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu} \quad \dots \dots \dots \quad (4.6)$$

$$\bullet N_{st} = A_{st} \cdot \sigma_{st} \quad \dots \dots \dots \quad (4.7)$$

➤ En remplaçant (4.6) et (4.7) dans (4.5), on obtient :

$$\boxed{0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu} = A_{st} \cdot \sigma_{st}} \quad \dots \dots \dots \quad (4.8)$$

➤ $\sum M_A = 0$ (la somme des moments est calculé par rapport au C.d.G.

des aciers tendus)

$$\Rightarrow M_u - N_{bu} \cdot Z_u = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (4.9)$$

$$\bullet Z_u = d - 0.4y_u \text{ (bras de levier)} \quad \dots \dots \dots \quad (4.10)$$

- Avec (4.6), (4.9) et (4.10) on obtient :

$$M_u - (0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu}) \cdot (d - 0.4 y_u) = 0$$

$$\Rightarrow M_u = (0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu}) \cdot (d - 0.4 y_u) \quad \dots \dots \dots \quad (4.11)$$

- Avec (4.5) , (4.7) et (4.9), on obtient :

$$M_u = A_{st} \cdot \sigma_{st} \cdot Z_u \quad \dots \dots \dots \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow A_{st} = M_u / (\sigma_{st} \cdot Z_u) \quad \dots \dots \dots \quad (4.13)$$

- Rappelons qu'au paragraphe 4.2.1 on a posé :, $\alpha_u = y_u/d$
donc : $Z_u = (1 - 0.4 \alpha_u) \cdot d$ $\dots \dots \dots \quad (4.14)$

- En posant : $\beta_u = Z_u/d$

$$\text{Soit } \beta_u = 1 - 0.4 \alpha_u \text{ (bras de levier réduit)} \quad \dots \dots \dots \quad (4.15)$$

- L'équation (4.13) devient :

$$A_{st} = M_u / (\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d) \quad \dots \dots \dots \quad (4.16)$$

- L'équation (4.11) devient : $M_u = 0.8 \alpha_u \cdot (1 - 0.4 \alpha_u) \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu}$ $\dots \dots \dots \quad (4.17)$

- En posant : $\mu_u = M_u / (b \cdot d^2 \cdot f_{bu})$ (μ_{bu} : Moment ultime réduit)

$$\text{On a : } \mu_u = 0.8 \alpha_u \cdot (1 - 0.4 \alpha_u) \quad \dots \dots \quad (4.18)$$

$$\text{et } \alpha_u = 1.25 \cdot (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_u}) \quad \dots \dots \quad (4.19)$$

Remarques:

- Si $\alpha_u = 0.167 \Rightarrow \text{pivot A}$ ($\varepsilon_{bc} = 2\%$ et $\varepsilon_{st} = 10\%$) ; $\underline{\mu_u < 0.125}$
- Si $0 \leq \alpha_u < 0.167 \Rightarrow \text{pivot A} ; \underline{0 \leq \mu_u < 0.125}$
- Si $0.167 \leq \alpha_u \leq 0.259 \Rightarrow \text{pivot A}$ ($2\% \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5\%$ et $\varepsilon_{st} = 10\%$) ; $\underline{0.125 \leq \mu_u \leq 0.186}$
- Si $0.259 \leq \alpha_u \leq \alpha_f \Rightarrow \text{pivot B}$ ($\varepsilon_{bc} = 3.5\%$ et $10\% \geq \varepsilon_{st} \geq \varepsilon_i$) ; $\underline{0.186 \leq \mu_u \leq \mu_f}$

Etapes de calcul à l'E.L.U.R. pour déterminer la section d'armature A d'une section rectangulaire sans armatures comprimées :

1. Calcul des contraintes limites :

1.1 Béton : $f_{bu} = \frac{0.85 f_{cj}}{\theta \gamma_b}$

1.2 Acier : $f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$

2. Calcul des moments réduits

2.1 Moment ultime réduit μ_{bu}

$$\mu_u = M_u / (b \cdot d^2 \cdot f_{bu})$$

2.2 Moment ultime réduit limite μ_l

- $\mu_l = 0.8 \alpha_l \cdot (1 - 0.4 \alpha_l)$

avec $\alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + (\varepsilon_l \cdot 1000)}$ et $\varepsilon_l = f_e / (\gamma_s \cdot E_s)$

3. Comparaison des moments réduits

- $\mu_u \leq \mu_l$?

- $\mu_u \leq \mu_l \Rightarrow A_{sc} = 0$ (section sans armatures comprimées), suivre les étapes 4, 5, 6 et 7.

- $\mu_u > \mu_l \Rightarrow A_{sc} \neq 0$ (section avec armatures comprimées), voir le paragraphe 4.2.2.2.

4. Calcul de la position relative de la fibre neutre

$$\alpha_u = 1.25 \cdot (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_u})$$

5. Calcul du bras de levier réduit

$$\beta_u = 1 - 0.4 \alpha_u$$

6. Détermination de la contrainte de calcul de l'acier tendu (σ_{st})

Selon le cas, pivot A ou pivot B

7. Calcul de la section d'acier

$$A_{st} = M_u / (\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d)$$

4.2.2.2 Section avec aciers comprimés

Lorsque, dans une section rectangulaire dont les dimensions sont imposées, on trouve que $\mu_u > \mu_i$, le moment M_u peut être équilibré en renforçant la partie comprimée de la section au moyen d'armatures de section A_{sc} .

Principe de calcul des sections d'armatures (Fig. 4.5)

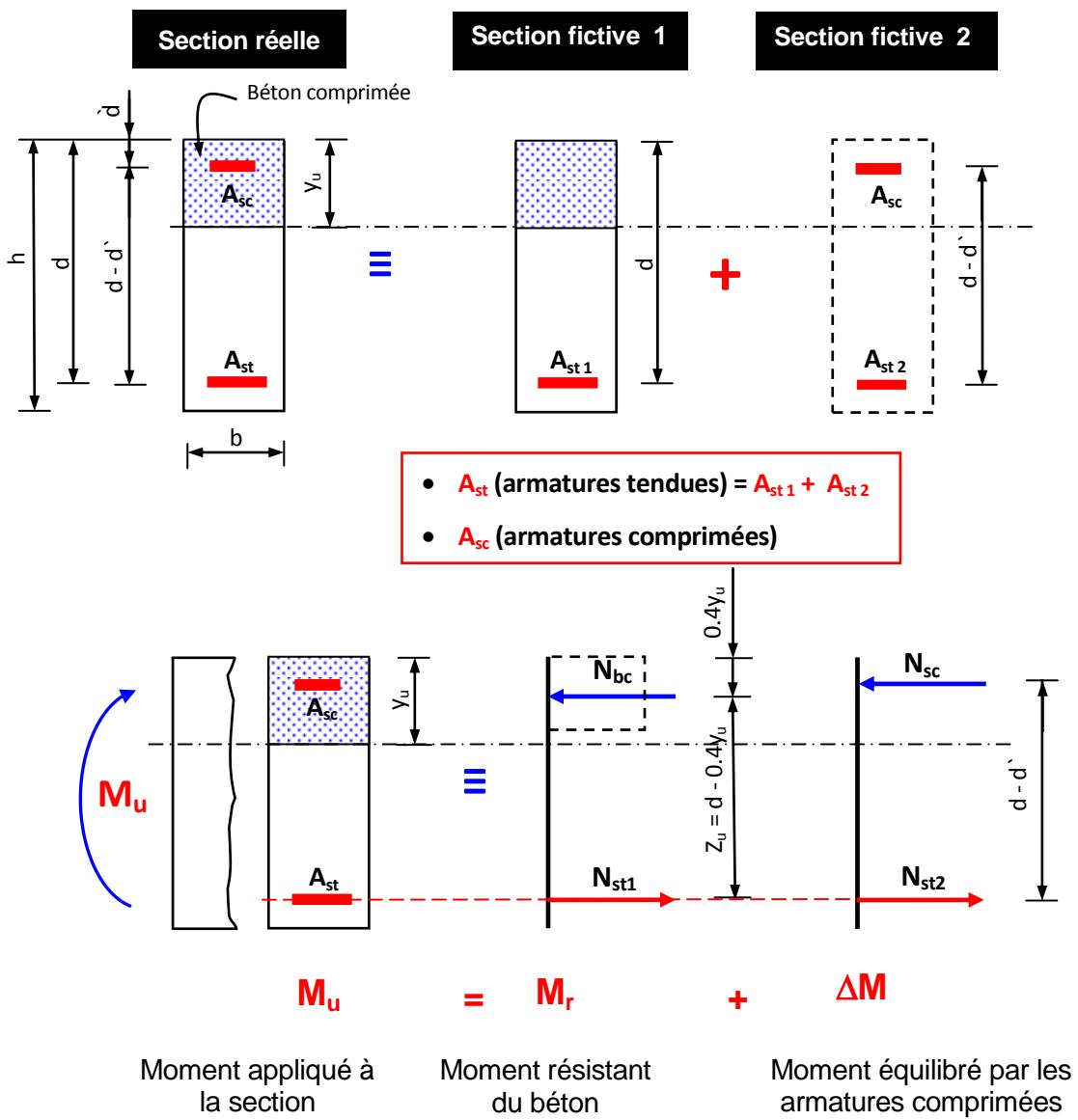


Fig. 4.5 : Principe de calcul  l'ELU d'une section rectangulaire avec aciers comprimés

- M_r (Le moment résistant du béton) :** est le moment ultime que peut équilibrer la section sans lui ajouter les aciers comprimés.

- **ΔM** (Le moment résiduel) : est la différence entre le moment ultime sollicitant la section et le moment résistant du béton.

- $N_{st} = N_{st1} + N_{st2}$ (4.20)

➤ **Calcul du moment résistant du béton M_r :**

$$\mu_l = M_r / (b \cdot d^2 \cdot f_{bu})$$
(4.21)

avec μ_l : le moment ultime réduit limite

$$\Rightarrow M_r = \mu_l \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu}$$
(4.22)

➤ **Calcul du moment résiduel ΔM :**

$$\Delta M = M_u - M_r$$
(4.23)

➤ **Calcul des armatures tendues de la section fictive 1 (A_{st1}):**

$$A_{st1} = M_r / (\sigma_{st} \cdot \beta_l \cdot d)$$
 (voir paragraphe 4.2.2.1),

On a : $\epsilon_{st} = \epsilon_l \Rightarrow \sigma_{st} = f_{su}$ (voir Fig. 2.3 et Fig. 4.3)

Donc : $A_{st1} = M_r / (f_{su} \cdot \beta_l \cdot d)$ (4.24)

➤ **Calcul des armatures tendues de la section fictive 2 (A_{st2}):**

$$\Delta M = N_{st2} \cdot (d - d')$$
(4.25)

$$N_{st2} = f_{su} \cdot A_{st2}$$
(4.26)

En remplaçant (4.26) dans (4.25), on a:

$$\Delta M = f_{su} \cdot A_{st2} \cdot (d - d') \Rightarrow A_{st2} = \Delta M / (f_{su} \cdot (d - d'))$$
(4.27)

➤ **Calcul des armatures comprimées de la section fictive 2 (A_{sc}):**

$$N_{sc} = N_{st2}$$
(4.28)

$$\Delta M = N_{sc} \cdot (d - d')$$
(4.29)

$$N_{sc} = \sigma_{sc} \cdot A_{sc}$$
(4.30)

En remplaçant (4.30) dans (4.29), on a :

$$\Delta M = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (d - d')$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{sc} = \Delta M / (\sigma_{sc} \cdot (d - d'))} \quad \dots \dots \dots (4.31)$$

❖ Détermination de la contrainte de l'acier comprimé (σ_{sc}) :

- En se basant sur le principe des triangles semblables (Fig. 4.6), on a :

$$\frac{\varepsilon_{sc}}{3.5 \cdot 10^{-3}} = \frac{y_u - d'}{y_u} \Rightarrow \varepsilon_{sc} = 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{a_l \cdot d - d'}{a_l \cdot d} \right) \dots \dots (4.32)$$

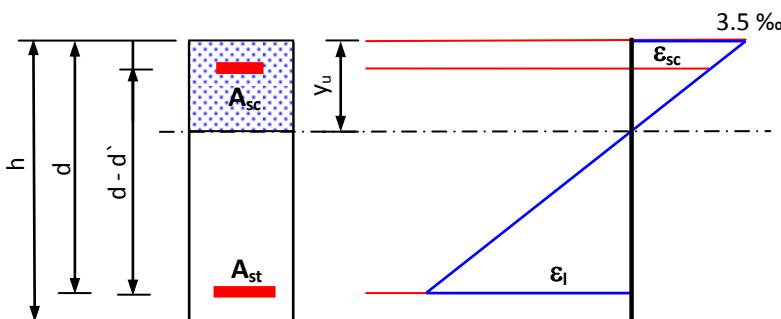
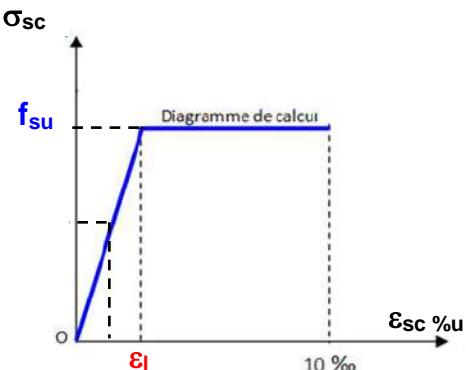


Fig. 4.6 : Diagramme de déformation

- En connaissant ε_{sc} on peut déterminer σ_{sc} :

➤ Si $\varepsilon_{sc} < \varepsilon_l \Rightarrow \sigma_{sc} = \varepsilon_{sc} \cdot E_{sc}$

➤ Si $\varepsilon_{sc} > \varepsilon_l \Rightarrow \sigma_{sc} = f_{su}$



- Finalement, on remplace la valeur de σ_{sc} dans la relation (4.31) pour déterminer la section des armatures A_{sc} .

➤ La section totale des armatures tendues A_s :

$$A_{st} = A_{st\ 1} + A_{st}$$