CHAPITRE IV

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS DROITES

4.1. Moments statiques d'une section droite

Le moment statique W_x de la surface plane A par rapport à l'axe x de son plan est défini par la relation :

$$W_x = \int_A y \, dA$$

Le moment statique W_y de la surface plane A par rapport à l'axe y de son plan est défini par la relation :

$$W_y = \int_A x \, dA$$

En intégrant, on obtient :

$$W_x = Y_G \, A \qquad ; \qquad W_y = X_G \, A$$

X_G et Y_G représentent respectivement les distance entre le centre de gravité de la section et les axes x et y.

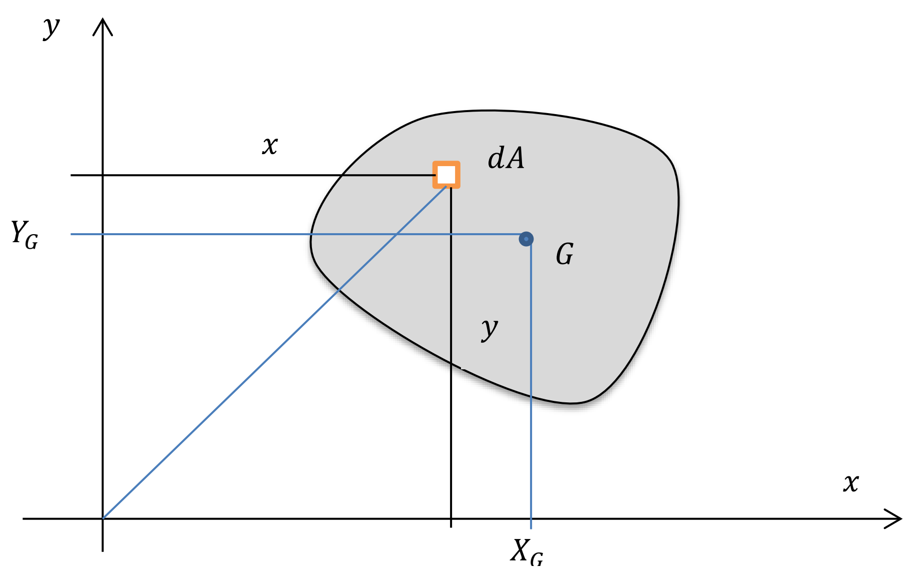

Figure 4.1. Coordonnées de centre de gravité

Le moment statique est en unité de longueur à la puissance 3 (mm^3).

Le moment statique peut être positif, négatif ou nul.

Le moment statique d'une surface par rapport à un axe de symétrie est nul parce que cet axe passe par le centre de gravité G.

4.2. Moments d'inertie d'une section droite

Le moment d'inertie I_x de la surface plane A par rapport à l'axe x de son plan est défini par la relation :

$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

Le moment d'inertie I_y de la surface plane A par rapport à l'axe y de son plan est défini par la relation :

$$I_y = \int_A x^2 \, dA$$

Le moment d'inertie polaire d'une surface plane A par rapport à un point O de son plan est défini par la relation :

$$I_o = \int_A \rho^2 \, dA$$

Le moment d'inertie polaire d'une surface plane A par rapport à un point O de son plan est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes rectangulaires de son plan passant par ce point.

$$I_o = \int_A \rho^2 \, dA = \int_A (x^2 + y^2) \, dA = \int_A x^2 \, dA + \int_A y^2 \, dA = I_y + I_x$$

Les moments d'inertie et d'inertie polaire sont toujours positifs.

Le moment d'inertie est en unité de longueur à la puissance 4 (mm^4).

Le moment d'inertie centrifuge d'une surface plane A par rapport aux axes (x, y) de son plan est défini par la relation

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

Le moment d'inertie centrifuge peut être positif, négatif ou dans un cas particulier nul (quand il est calculé par rapport à un axe de symétrie).

Le moment d'inertie centrifuge est en unité de longueur à la puissance 4 (mm^4).

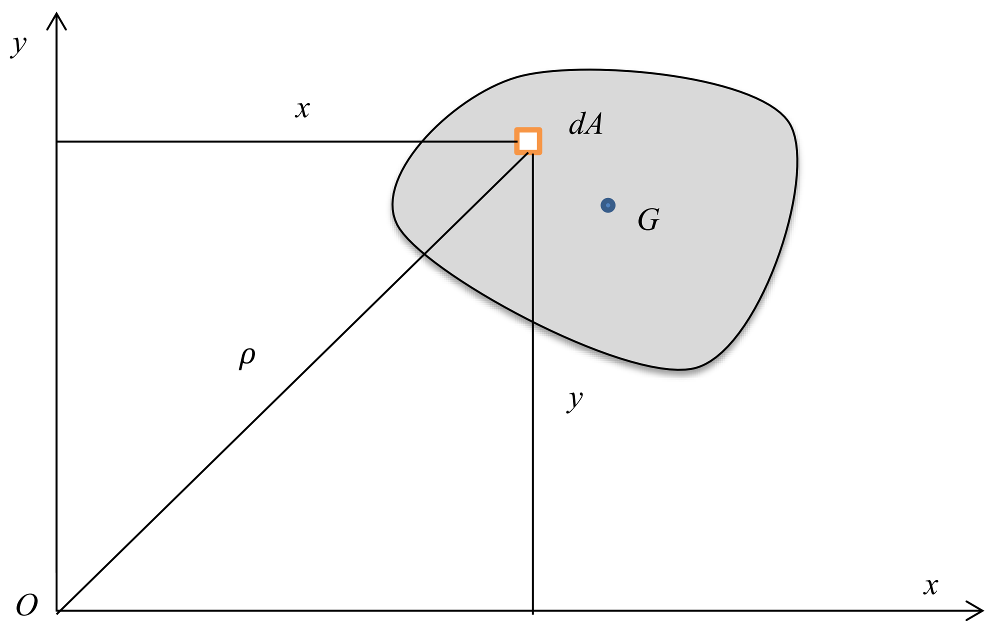

Figure 4.2. Moment d'inertie

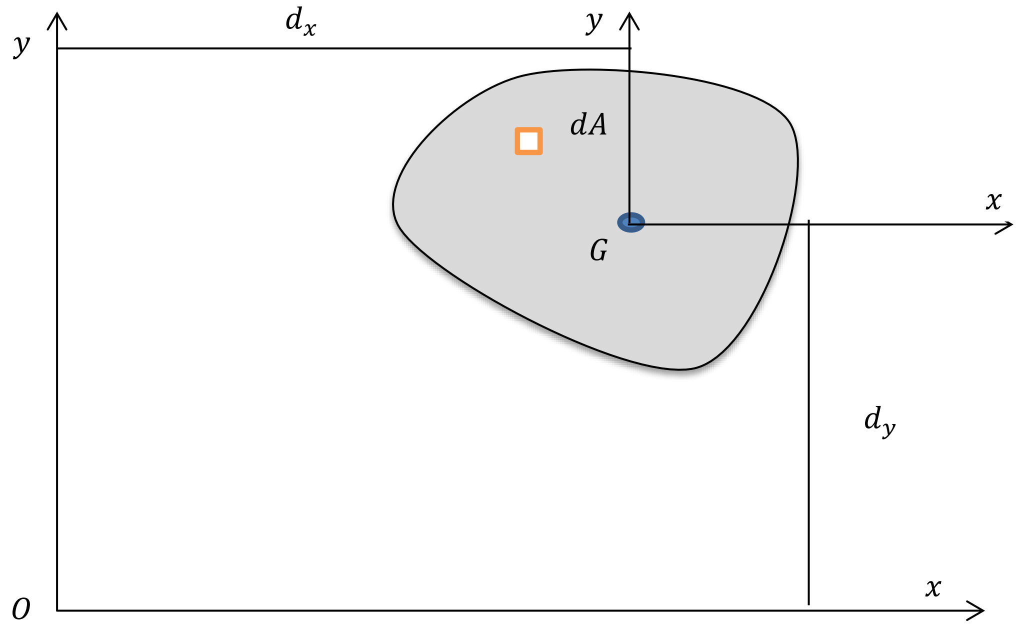

Figure 4.3. Théorème de Huygens

4.3.2 Changement des directions des axes

Considérons une surface plane A et deux systèmes d'axes (Oxy) et (OXY) de son plan tel que l'angle compris entre x et X est α. Supposons que les moments d'inertie I_x et I_y soient connus.

Nous nous proposons de déterminer I_X *et* I_Y. Par définition, on peut écrire :

$$I_X = \int_A Y^2 \, dA \quad ; \quad I_Y = \int_A X^2 \, dA$$

Ecrivons les relations de changement de base :

$$x = \cos\alpha \, X - \sin\alpha \, Y \quad ; \quad y = \sin\alpha \, X + \cos\alpha \, Y$$

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha \quad ; \quad Y = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

Ainsi le moment d'inertie I_X s'écrit :

$$I_X = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 \, dA$$

En développant, on obtient :

$$I_X = I_x\, cos^2\alpha + I_y\, sin^2\alpha - I_{xy} \sin 2\,\alpha$$

Par analogie, le moment d'inertie I_Y s'écrit :

$$I_Y = I_y\, cos^2\alpha + I_x\, sin^2\alpha - I_{xy} \sin 2\,\alpha$$

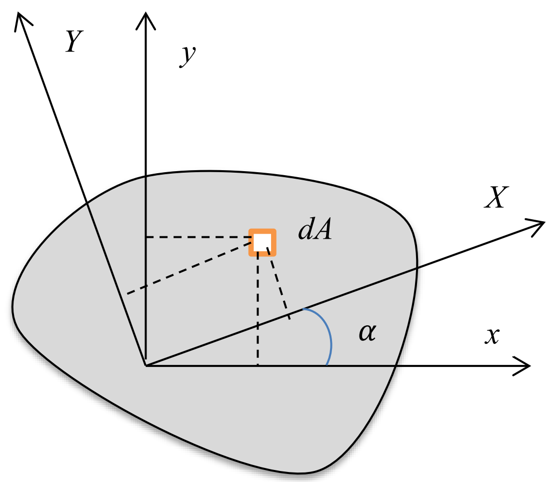

Figure 4.4. Changement des directions des axes