09/04/2025

Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Master 1 : EDP et applications

Interrogation
Introduction aux opérateurs non bornés

Exercice 1 (5points) : Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (borné) est **compact** si l'image de la boule unité $B = \{x \in \mathcal{H} \mid \|x\| \leq 1\}$ par T est relativement compacte (i.e., son adhérence est compacte).

1) : Montrer que tout opérateur T de rang fini (i.e., $\dim(\mathrm{Im}(T)) < +\infty$) est compact.

2) : (Exemple concret dans $\ell^2(\mathbb{N})$) Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ et T l'opérateur défini de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ par :

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(\frac{x_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On souhaite montrer que T est compact.
Sous-questions guidées :

(a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur T_N comme la troncature de T à partir du rang $N+1$, c. à. d.

$$T_N\left((x_n)_n\right) = \left(\frac{x_0}{1}, \frac{x_1}{2}, \ldots, \frac{x_N}{N+1}, 0, 0, \ldots\right).$$

Montrer que T_N est de rang fini.

(b) Calculer la norme d'opérateur $\|T - T_N\|$ et montrer que $\|T - T_N\| \to 0$ quand $N \to +\infty$.

(c) Conclure que T est compact.

Exercice 2 (5points) :

1) Soit $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ et $K \in L^2([0,1] \times [0,1])$. On définit l'opérateur intégral T_K sur $\mathcal{H}$ par :

$$(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy.$$

Montrer que T_K est un opérateur de Hilbert-Schmidt et que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \|T_K e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =: \|T_K\|_{HS} = \|K\|_{L^2([0,1]\times[0,1])}.$$

2) Soient T un opérateur de Hilbert-Schmidt et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (un opérateur borné). Montrer que AT est un opérateur de Hilbert-Schmidt et vérifie

$$\|AT\|_{HS} \leq \|A\| \|T\|_{HS}.$$