10/04/2025

Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Master 1 : EDP et applications

Corrigé de l'interrogation
Introduction aux opérateurs non bornés

Exercice 1 : Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (borné) est **compact** si l'image de la boule unité $B = \{x \in \mathcal{H} \mid \|x\| \leq 1\}$ par T est relativement compacte (i.e., son adhérence est compacte).

1) : Montrer que tout opérateur T de rang fini (i.e., $\dim(\mathrm{Im}(T)) < +\infty$) est compact.

2) : (Exemple concret dans $\ell^2(\mathbb{N})$) Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ et T l'opérateur défini de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ par :

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(\frac{x_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On souhaite montrer que T est compact.

Sous-questions guidées :

(a) Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur T_N comme la troncature de T à partir du rang $N+1$, c. à. d.

$$T_N\left((x_n)_n\right) = \left(\frac{x_0}{1}, \frac{x_1}{2}, \ldots, \frac{x_N}{N+1}, 0, 0, \ldots\right).$$

Montrer que T_N est de rang fini.

(b) Calculer la norme d'opérateur $\|T - T_N\|$ et montrer que $\|T - T_N\| \to 0$ quand $N \to +\infty$.

(c) Conclure que T est compact.

Solution :

1) : Soit T de rang fini. Alors $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{H}$.

— L'image de la boule unité $T(\overline{B})$ est bornée (car T est continu) et contenue dans un espace de dimension finie.

— En dimension finie, les fermés bornés sont compacts : $\overline{T(\overline{B})}$ est compact.

— Donc T est compact.

2) : (a) T_N est de rang fini car $\mathrm{Im}(T_N) \subset \mathbb{R}^{N+1} \times \{0\} \times \ldots$, donc $\dim(\mathrm{Im}(T_N)) \leq N+1$. Par la Question 1, T_N est compact.

(b) **Calcul de $\|T - T_N\|$:**

— Pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ avec $\|x\| = 1$, on a :

$$\|(T - T_N)x\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n+1}\right|^2 \leq \frac{1}{(N+2)^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \leq \frac{1}{(N+2)^2}.$$

— Ainsi, $\|T - T_N\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T - T_N)x\| \leq \frac{1}{N+2} \to 0$ quand $N \to +\infty$.

(c) **Conclusion :**

— T est limite en norme d'opérateurs compacts $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

— L'espace des opérateurs compacts est fermé dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, donc T est compact.

Exercice 2 :

1) Soit $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ et $K \in L^2([0,1]\times[0,1])$. On définit l'opérateur intégral T_K sur $\mathcal{H}$ par :

$$(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy.$$

Montrer que T_K est un opérateur de Hilbert-Schmidt et que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \|T_K e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =: \|T_K\|_{HS} = \|K\|_{L^2([0,1]\times[0,1])}.$$

2) Soient T un opérateur de Hilbert-Schmidt et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (un opérateur borné). Montrer que AT est un opérateur de Hilbert-Schmidt et vérifie

$$\|AT\|_{HS} \leq \|A\|\|T\|_{HS}.$$

Solution :

1) Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2([0,1])$. Par définition, la norme de Hilbert-Schmidt de T_K est :

$$\|T_K\|_{HS}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|T_K e_n\|_{L^2}^2.$$

Calculons $\|T_K e_n\|_{L^2}^2$:

$$\|T_K e_n\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |(T_K e_n)(x)|^2\,dx = \int_0^1 \left|\int_0^1 K(x,y)e_n(y)\,dy\right|^2 dx.$$

En utilisant l'identité de Parseval pour $K(x,\cdot) \in L^2([0,1])$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\int_0^1 K(x,y)e_n(y)\,dy\right|^2 = \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy.$$

Ainsi, en intervertissant somme et intégrale (par le théorème de Fubini-Tonelli, car $K \in L^2$) :

$$\|T_K\|_{HS}^2 = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|\int_0^1 K(x,y)e_n(y)\,dy\right|^2\right) dx = \int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy\,dx = \|K\|_{L^2([0,1]\times[0,1])}^2.$$

Puisque $K \in L^2([0,1]\times[0,1])$, cette quantité est finie, donc T_K est un opérareur de Hilbert-Schmidt et $\|T_K\|_{HS} = \|K\|_{L^2}$.

2) Soient T un opérateur de Hilbert-Schmidt et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (opérateur borné).

   (a) Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Par définition de la norme de Hilbert-Schmidt :

$$\|AT\|_{HS}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|ATe_n\|^2.$$

   Comme A est borné, on a $\|ATe_n\| \leq \|A\|\|Te_n\|$. Ainsi :

$$\|AT\|_{HS} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^2\|Te_n\|^2 = \|A\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \|A\|^2\|T\|_{HS}^2.$$

   Puisque $\|T\|_{HS} < +\infty$ (car T est de Hilbert-Schmidt), on conclut que AT est de Hilbert-Schmidt :

$$\|AT\|_{HS} \leq \|A\|\|T\|_{HS}.$$