18/05/2025

Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Master 1 : EDP et applications

Examen
Introduction aux opérateurs non bornés

Durée : 2h

Exercice 1(8 points) : On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1])$ muni de sa norme usuelle :

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

et l'opérateur de dérivation $A = \frac{d}{dx}$ défini sur des domaines à préciser.

1. Montrer que A est un opérateur non borné.
   Indication : utiliser la suite $f_n(x) = \sin(n\pi x)$.
2. On considère le domaine :

$$D_0(A) = \{f \in H^1([0,1]) \mid f(0) = 0\}.$$

   (a) Rappeler la définition d'un opérateur fermé.
   (b) Montrer que A est fermé sur $D_0(A)$.
3. Le but maintenant est de montrer que si on étend le domaine à $D(A) = H^1([0,1])$, c. à. d. sans condition aux limites, alors A n'est plus fermé. Pour cela on considère la suite $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$.
   (a) Vérifier que $f_n \in D(A)$.
   (b) Montrer que f_n converge vers $x \mapsto \sqrt{x}$ dans $L^2([0,1])$.
   (c) Montrer pourquoi ceci entraîne que A n'est pas fermé.

Exercice 2(4 points) : Soit $\big(H, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel de H.

1. Montrer que si F est dense dans H, alors son orthogonal est réduit à zéro, c'est-à-dire :

$$F^\perp = \{0\},$$

   où $F^\perp = \{u \in H \mid \forall v \in F, \langle u, v \rangle = 0\}$.

2. Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non borné.

   -Montrer que si $D(A)$ est dense dans H, alors l'adjoint A^* est bien défini, c'est-à-dire que pour tout $v \in H$, s'il existe $w \in H$ tel que :

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, w \rangle \quad \text{pour tout } u \in D(A),$$

   alors w est unique.

Exercice 3(8 points) : On considère l'opérateur de multiplication A défini par :

$$A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad u \mapsto xu,$$

où le domaine est $D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid xu \in L^2(\mathbb{R})\}$.

1. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact) est inclus dans $D(A)$.
2. En déduire que $D(A)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que A est non borné en considérant la suite indicatrice :

$$u_n(x) = \sqrt{n} \cdot \mathbf{1}_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x).$$

4. Montrer que A n'admet aucune valeur propre.
5. (a) Montrer que A est symétrique.
   (b) Déterminer le domaine de l'adjoint A^*.
   (c) Conclure que A est auto-adjoint.