Université de Jijel 21 Mai 2025
Faculté des sciences et de la technologie
1^{ere} année ST

Examen: MATHS II

Exercise 1 [6pts]

1-

$$[\mathbf{2pts}] \int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

Une fraction rationnelle dont le dénominateur est un polynôme de degré 2 avec $\Delta \prec 0$.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2-1+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + c^{te}.$$

2- En utilisant un changement de variable, on peut déduire

$$[\mathbf{2pts}] \int \frac{5x-1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{5x-1}{(x+1)^2+2} dx$$

Soit le changement de la variable $t = x+1 \Rightarrow x = t-1$ et $dx = dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-1}{(x+1)^2+2} dx &= \int \frac{5(t-1)-1}{t^2+2} dx = \int \frac{5t-6}{t^2+2} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2t}{t^2+2} dx - 6 \int \frac{dx}{t^2+2} \\ &= \frac{5}{2} \ln(t^2+2) - \frac{6}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{t}{\sqrt{2}}) + c^{te} \\ &= \frac{5}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{6}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + c^{te} \end{aligned}$$

3- Calculer

$$[\mathbf{2pts}] \int \frac{dx}{2+\cos x}$$

Soit le changement de la variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, donc $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2} = \int \frac{2dt}{3+t^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{t}{\sqrt{3}}) + C^{te} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}) + C^{te} \end{aligned}$$

Exercise 2 [**8pts**] **I**) *On considère l'application f linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par:*

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\quad (x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(x+y-z,y+2z,x-y)$$

Donner la matrice A associée à f dans la base canonique $\mathcal{B}_c=\{e_1,e_2,e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

[**1pts**]La matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ peut être obtenue de deux manières.

$$A=Mat_{B_c}(f)=\begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}[\text{Méthode classique}],$$

ou encore

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\quad (x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(x+y-z,y+2z,x-y) \\ &= \begin{pmatrix} x+y-z \\ y+2z \\ x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}[2^{eme}\text{Méthode}]. \end{aligned}$$

Ceci n'est valable que dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

II) Etant donné l'ensemble $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ avec $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(1,0,1)$ et $v_3=(0,-1,2)$

*) Montrer que $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, en déduire le rang de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ ssi:

$$[\mathbf{0.5pts}]\left\{\begin{array}{l} 1)\ B \text{ est génératrice}, \\ 2)\ B \text{ est libre}. \end{array}\right.$$

est ceci équivalent à dire $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ ssi

$$[\mathbf{0.5pts}]\left\{\begin{array}{l} 1)\ CardinalB=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3=3, \\ 2)\ \det\{v_1,v_2,v_3\}\neq 0. \end{array}\right.$$

D'une part $CardinalB=\{v_1,v_2,v_3\}=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3=3$,[**0.5pts**] et d'autre part

$$\det\{v_1,v_2,v_3\}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0.\,[\mathbf{0.5pts}]$$

Par suite l'ensemble $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ (dite nouvelle base)

*) Ecrire la matrice de passage $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ le passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$)

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} [\mathbf{0.5pts}]$$

*) Calculer $\mathbf{P}^{-1}$ ($\mathbf{P}^{-1}$= $\mathbf{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c}$ le passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$).

$$[\mathbf{1.5pts}]\,\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = \frac{1}{\det \mathbf{P}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}}\,{}^t Com\mathbf{P}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \frac{1}{(-1)}\,{}^t\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-1)}\,{}^t\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*) Donner la matrice D associée à f dans la base $\mathcal{B}$.

[**1.5pts**]La matrice associée à f dans la nouvelle base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ peut être obtenue de deux manières.

$$D = Mat_B(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \text{[Méthode classique]}$$

on encore

$$D = Mat_B(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

III) [**1.5pts**]Calculer en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes [Gauss]

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2L_1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = abc\left[(b-a)\left(c^2-a^2\right)-\left(b^2-a^2\right)(c-a)\right] \\
&= abc\left[(b-a)(c-a)(c+a)-(b-a)(b+a)(c-a)\right] \\
&= abc\left[(b-a)(c-a)\left[(c+a)-(b+a)\right]\right] \\
&= abc\left[(b-a)(c-a)(c-b)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\,(a-b)(b-c)(a-c)
$$

Exercise 3 [**6pts**]*Soit à résoudre le système* (S_a) *suivant*

$$
(S_\alpha)\begin{cases} ax+y+z = & 1 \\ x+ay+z = & 2 \\ x+y+az = & 3 \end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}
$$

1 *Écrire sous forme matricielle le système* (S_a)*.*

$$
[\mathbf{1pts}]\,(S_\alpha)\begin{cases} ax+y+z = & 1 \\ x+ay+z = & 2 \\ x+y+az = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}, \quad a\in\mathbb{R}
$$

2 *Pour quelle valeurs de a le système est de Cramer.*

Le systeme est de Cramer ssi $\det A \neq 0$ [**0.5pts**]

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= a\left(a^2-1\right)-(a-1)+(1-a) = a\left(a^2-1\right)-(a-1)-(a-1) \\
&= a(a-1)(a+1)-2(a-1) = (a-1)\left[a(a+1)-2\right] \\
&= (a-1)\left[a^2+a-2\right] = (a-1)^2(a+2)\,.\,[\mathbf{1pts}]
\end{aligned}
$$

Le systeme est de Cramer ssi $a\neq 1$ *et* $a\neq -2$ [**0.5pts**]

3 *Résoudre le système dans le cas contraire ((S_a) n'est pas de Cramer), et en déduire le rang.*

[**1pts**]**Lorsque** $a=1$

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z= & 1 \\ x+y+z= & 2 \\ x+y+z= & 3 \end{cases},$$

Le système est incompatible; l'ensemble des solutions est vide Φ et le rang de (S_1) est 1, car on peut extraire de la matrice associée une sous-matrice 1×1 de déterminant non nul.

[**2pts**]**Lorsque** $a=-2$

$$\left(S_{(-2)}\right)\begin{cases} -2x+y+z= & 1 \\ x-2y+z= & 2 \\ x+y-2z= & 3 \end{cases},$$

La matrice augmentée s'écrit

$$[A\,|B\,] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right]$$

$$[A\,|B\,] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \end{array}\right]$$

$$[A\,|B\,] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 7 \end{array}\right] \left[\begin{array}{l} \mathbf{L}_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \mathbf{L}_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\mathbf{L}_1 \end{array}\right]$$

$$[A\,|B\,] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right] \left[\begin{array}{l} L_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \mathbf{L}_2 \end{array}\right]$$

Le système est incompatible; l'ensemble des solutions est vide Φ et le rang de $\left(S_{(-2)}\right)$est 2, car on peut extraire de la matrice associée une sous-matrice 2×2 de déterminant non nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$