

Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatique

Département de mathématiques

3^{ème} année Licence, mathématiques

Examen
Géométrie différentielle
Durée : 2h00

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

Exercice 1. ^{11pts} On considère les 1-formes différentielles, α sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donnée par

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

et β sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\beta = e^{x-y} dx + xy dy.$$

1. Calculer $d\beta$, $\alpha \wedge \beta$ et $\alpha \wedge d\beta$ en précisant leurs degrés.
2. Montrer que α est fermée.
3. Trouver une primitive de α sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x,y), y \neq 0\}$.
4. Soit $M = \{(\cos t, \sin t), t \in]0, \pi[\}$ la sous variété parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :
 - Donner une paramétrisation globale φ de M .
 - Calculer φ^* et déduire $\int_M \alpha$.
5. La forme α est-elle exacte ?

Exercice 2. ^{09pts} 1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les deux sous ensembles :

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x\} \text{ et } M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = -x\}.$$

Dire pourquoi M_1 et M_2 sont des sous variétés dont on précisera leurs dimensions.
Est ce que $M_1 \cup M_2$ est une sous variété ? Vous pouvez justifier la réponse graphiquement.

2. On considère l'ensemble

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 4y^2 = 1, z = x^2 - 4y^2\}.$$

- (a) Montrer que l'ensemble M est une sous variété de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension et sa classe.
- (b) Calculer l'espace tangent à M en tout point et en donner une base.
- (c) Montrer que M est orientable.
- (d) Trouver une base du supplémentaire. Est-ce qu'elle définit la même orientation ?

Bon travail
F. Aliouane

Correction

Exo 18 (11pts)

1) Soit $\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ et

$$\beta = e^{x-y} dx + xy dy$$

$$d\beta = d(e^{x-y} dx + xy dy)$$

$$= e^{x-y} \underbrace{dx \wedge dx}_0 - e^{x-y} \underbrace{dy \wedge dx}_{-dx \wedge dy} + y \underbrace{dx \wedge dy}_{\text{Q2f}} + x \underbrace{dy \wedge dy}_0$$

$$= (e^{x-y} + y) dx \wedge dy \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{Q2f}$$

$$\alpha \wedge \beta = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) \wedge (e^{x-y} dx + xy dy)$$

$$= \frac{-ye^{x-y}}{x^2+y^2} \underbrace{dx \wedge dx}_0 - \frac{xy^2}{x^2+y^2} dx \wedge dy + \frac{xe^{x-y}}{x^2+y^2} dy \wedge dx + \frac{xy^2}{x^2+y^2} \underbrace{dy \wedge dy}_0$$

$$= -\frac{xy^2 + xe^{x-y}}{x^2+y^2} dx \wedge dy \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \quad \text{Q2f}$$

et $\alpha \wedge d\beta = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) \wedge (e^{x-y} + y) dx \wedge dy = 0 \quad \text{Q2f}$

car $\alpha \wedge d\beta \in \mathcal{S}^3(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \quad \text{Q2f}$

2) On dit que α est fermée ssi $d\alpha = 0$. (0,5)

$$d\alpha = d\left(\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right)$$

$$\text{Q2f} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) \underbrace{dx \wedge dx}_0 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) dx \wedge dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) \underbrace{dy \wedge dy}_0$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \underbrace{dy \wedge dx}_{-dx \wedge dy} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0 \Rightarrow \alpha \text{ est fermée.}$$

$\alpha \in \mathcal{S}^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$, donc la primitive $f \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ (0,25)

et on a $d\phi = \alpha$ i.e. :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$
(0,25)

$$\Rightarrow \phi(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx = \int \frac{-y}{y^2(1+(\frac{x}{y})^2)} dx = -\frac{1}{y} \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{y})^2}$$

$$= -\int \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + g(y).$$
(0,25)

Or $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\frac{x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2} + g'(y) = \frac{x}{y^2} \frac{y^2}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ (0,25)

$$\Rightarrow g'(y) = 0$$

$$\Rightarrow g(y) = \text{Cst}$$
(0,25)

donc $\phi(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \text{Cst}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (0,25)

4) Soit $e:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto e(t) = (\cos t, \sin t).$

e est une immersion car $J_e(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$ (0,5)

De plus, $e:]0, \pi[\rightarrow \Pi$ est injective et surjective

d'inverse est $(x,y) \in \Pi \mapsto \arccos x \in]0, \pi[$ qui est continue (0,25)

donc e est un homéomorphisme. On a, $e(]0, \pi[) = \Pi$ (0,25)

alors Π est simple. On a Π est orientée et (0,25)

on voit que $(-\sin t, \cos t)$ est un vecteur tangent à Π et

qui oriente Π dans le sens inverse des aiguilles d'un
 cadran car $\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1 > 0$ i.e., $\{(-\sin t, \cos t)\}$ est une
 base directe pour $T_{(x,y)}\Pi$, (0,5)

Le pull-back de α par ϕ est :

$$\phi^*(\alpha) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \circ \phi \right) d(x \circ \phi) + \left(\frac{x}{x^2+y^2} \circ \phi \right) d(y \circ \phi) \quad (0,5)$$

$$= \frac{-\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} d(\cos t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} d(\sin t)$$

$$= \sin^2 t dt + \cos^2 t dt = dt. \quad (0,25)$$

$$\text{Donc, } \int_{\Pi} \alpha = \int_{\phi} \alpha = \int_{[0, \pi[} \phi^*(\alpha) = \int_0^\pi dt = \pi. \quad (0,7)$$

5) On a α est fermée, par que α soit exacte il faut que l'ouvert doit être étoilé (Théorème de Poincaré) (0,5)

mais $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ n'est pas étoilé, c'est un domaine non étoilé (0,25)

Donc α n'est pas exacte. De plus, $\int_C \alpha = 2\pi$ sur $C = \{(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi[$ (0,25)

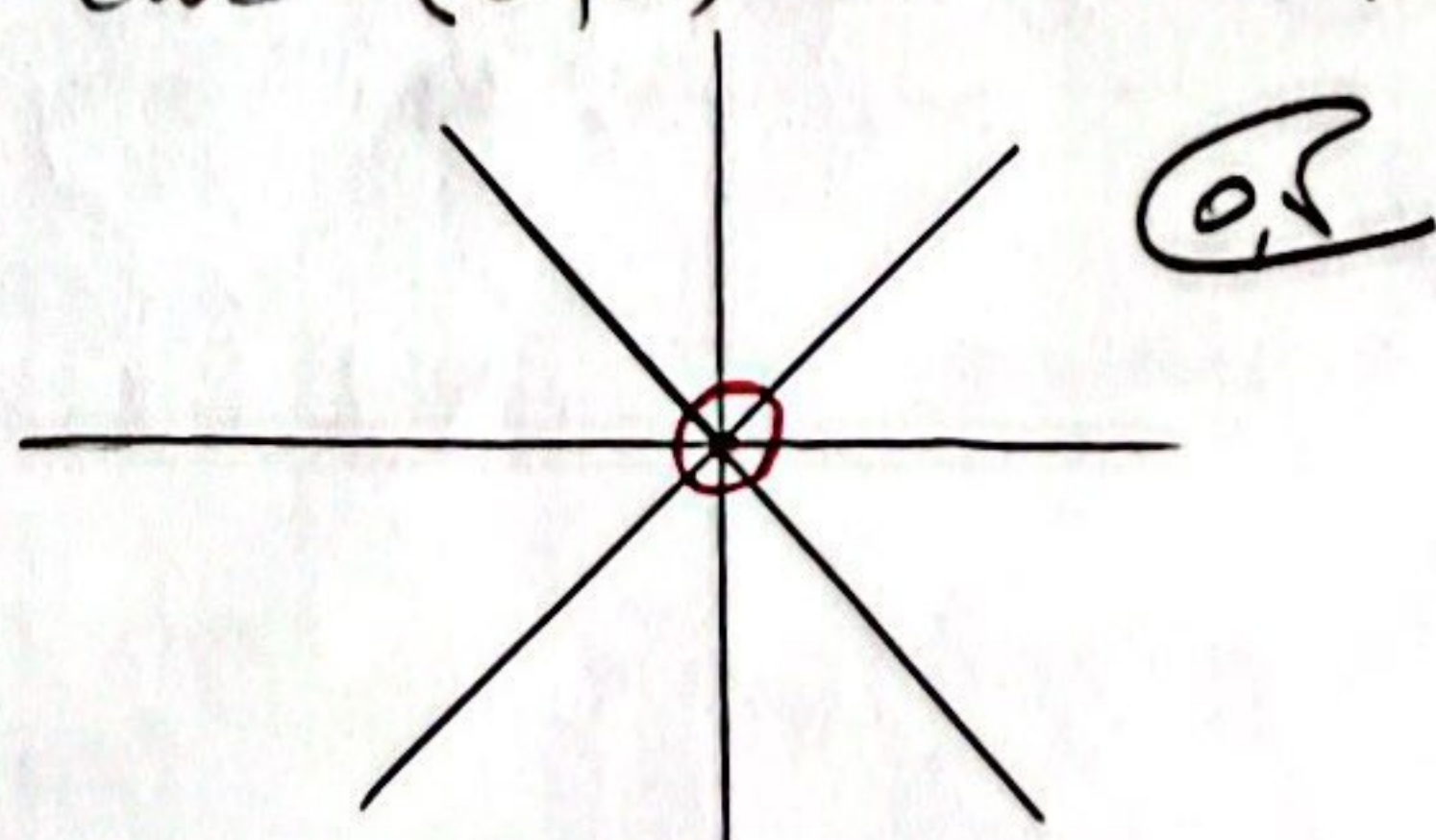
car le cercle entoure le trou.

Exo 28 (0,9 pts)

Soit $\Pi_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y=x\}$ et $\Pi_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y=-x\}$

(0,7) sont deux sous variétés de dimension 1 (en utilisant le graphique) (0,2)

mais $\Pi_1 \cup \Pi_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 = x^2\}$ n'est pas une sous variété car $(0,0)$ est un point double



$$\Pi = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 4y^2 = 1, z = x^2 - 4y^2 \}$$

Soit $(x, y, z) \in \Pi$. On considère l'application g de classe C^∞

définie par : $g: \mathbb{R}^3 - \{ (0, 0, z); z \in \mathbb{R} \} \rightarrow \mathbb{R}^2$ Q2
 $(x, y, z) \mapsto (x^2 + 4y^2 - 1, z - x^2 + 4y^2)$

$U = \mathbb{R}^3 - \{ (0, 0, z); z \in \mathbb{R} \}$ Q2 est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et on a

$(x, y, z) \in U$ car $0^2 + 4 \cdot 0^2 = 0 \neq 1$. On a

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 8y & 0 \\ -2x & 8y & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Q2}$$

Puisque $(x, y, z) \in U$, alors $x \neq 0 \vee y \neq 0$. donc

$\text{rg } Dg = 2 \xRightarrow{\text{Q2}} g \text{ est une submersion. De plus,}$

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{ (0, 0, 0) \}) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; g(x, y, z) = \underset{\mathbb{R}^2}{0} \} \quad \text{Q2} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{ (0, 0, z), z \in \mathbb{R} \}; g(x, y, z) = \underset{\mathbb{R}^2}{0} \} \\ &= \{ (x, y, z) \in U; x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \wedge z = x^2 - 4y^2 \} \\ &= \Pi \cap U \end{aligned}$$

Donc Π est la sous variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 et de classe C^∞ . Q2

2) Pour tout $(x, y, z) \in \Pi$, on a

$$T_{(x, y, z)} \Pi = \ker (dg(x, y, z)) \quad \text{Q2}$$

$$T_{(x,y,z)} \Pi = \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} 2x & 8y & 0 \\ -2x & 8y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3; 2xv_1 + 8yv_2 = 0 \wedge -2xv_1 + 8yv_2 + v_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3; 2xv_1 = -8yv_2 \wedge v_3 = 2xv_1 - 8yv_2 \right\}$$

Si $x \neq 0$

$$T_{(x,y,z)} \Pi = \left\{ (v_1, v_2, v_3) \mid v_1 = \frac{-4y}{x} v_2 \wedge v_3 = -16yv_2 \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{-4y}{x} v_2, v_2, -16yv_2 \right); v_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{v_2}{x} (4y, -x, 16xy); v_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \langle (4y, -x, 16xy) \rangle.$$

Si $y \neq 0$: $T_{(x,y,z)} \Pi = \left\{ (v_1, v_2, v_3) \mid v_2 = \frac{-x}{4y} v_1 \wedge v_3 = 4xv_1 \right\}$

$$= \left\{ \left(v_1, \frac{-x}{4y} v_1, 4xv_1 \right), v_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{v_1}{4y} (4y, -x, 16xy), v_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \langle (4y, -x, 16xy) \rangle$$

Alors, $T_{(x,y,z)} \Pi = \langle (4y, -x, 16xy) \rangle, \forall (x,y,z) \in \Pi.$

3) Considérons l'application :

$$b: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longmapsto b(x,y,z) = (4y, -x, 16xy)$$

Il est clair que b est continue et que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

(x, y, z) est une base ordonnée de $T_{(x, y, z)} \Pi$, donc Π est orientable. On a $\det T_{(x, y, z)} \Pi = 1$, donc

$$T_{(x, y, z)} \Pi = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3; xv_1 + 4yv_2 = 0 \wedge -2xv_1 + 8yv_2 + v_3 = 0\}$$

$$= \{(x, 4y, 0), (-2x, 8y, 1)\}^\perp. \quad \text{OK}$$

$\{(x, 4y, 0), (-2x, 8y, 1)\}$ est une base de supplémentaire,

soit $N: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ OK

$$(x, y, z) \longmapsto (x, 4y, 0), (-2x, 8y, 1)$$

qui est continue. On a,

$$\begin{vmatrix} x & -2x & 4y \\ 4y & 8y & -x \\ 0 & 1 & 16xy \end{vmatrix} = x^2 + 16y^2 + (16xy)^2 > 0 \quad \text{OK}$$

donc $\{(x, 4y, 0), (-2x, 8y, 1), (4y, -x, 16xy)\}$ est une base directe de $\mathbb{R}^3$ i.e., cette orientation induit sur chaque espace tangent la même orientation que celle définie par la base $\{(4y, -x, 16xy)\}$. OK