

Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel  
Faculté des sciences exactes et informatique

Département de mathématiques

3<sup>ème</sup> année Licence, mathématiques

Examen de Rattrapage  
Géométrie différentielle  
Durée : 2h00

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

**Exercice 1.** 1. On considère les 1-formes différentielles,  $\alpha$  et  $\beta$  sur  $\mathbb{R}^2$  données par

$$\alpha = \frac{x}{1+x^2+y^2}dx + \frac{y}{1+x^2+y^2}dy$$

et

$$\beta = \cos(xy)dx + \sin(xy)dy.$$

Calculer  $d\beta$ ,  $\alpha \wedge \beta$  et  $d(\alpha \wedge \beta)$  en précisant leurs degrés.

2. Montrer que  $\alpha$  est fermée et justifier pourquoi elle admet une primitive.

3. Trouver une primitive de  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

4. Soient  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$  une sous variété de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\gamma$  son bord orienté et  $w$  la forme différentielle de  $\mathbb{R}^2$  donnée par

$$w = xy^2dx + 2xydy,$$

Calculer  $\int_{\gamma} w$ .

**Exercice 2.** 1. Soit  $M_1$  une sous variété de  $\mathbb{R}^{n_1}$  de classe  $C^{k_1}$  et de dimension  $d_1$  et  $M_2$  une sous variété de  $\mathbb{R}^{n_2}$  de classe  $C^{k_2}$  et de dimension  $d_2$ , où  $n_i, k_i, d_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont des entiers non nuls.

Montrer que le produit  $M_1 \times M_2$  est une sous variété, dont on précisera la dimension. Qu'en est-il de  $\Omega \times V$  où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $V$  un vecteur de  $\mathbb{R}^{n-d}$ .

2. On considère l'ensemble

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \left( 4x^2(x^2 - 1) + y^2 \right)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

- (a) Montrer que l'ensemble  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer sa dimension et sa classe.
- (b) Calculer l'espace tangent à  $M$  en tout point.
- (c) Montrer que  $M$  est orientable.

Bon travail  
F. Aliouane

## Corrigé.

Exo 18 (10pts)

I/ Soit  $(x, y) \in \Pi_1 \times \Pi_2$  i.e.  $x \in \Pi_1$  et  $y \in \Pi_2$ .

Or  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont des sous variétés de dimension  $d_1$  et  $d_2$  resp. donc il existe  $U_x \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x \in U_x$  et une submersion  $g_1: U_x \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 - d_1}$  de classe  $C^{k_1}$ , tq. (0,5)

$$U_x \cap \Pi_1 = g_1^{-1}(\{0\})$$

et il existe un ouvert  $U_y \subset \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $y \in U_y$  et une submersion  $g_2: U_y \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 - d_2}$  de classe  $C^{k_2}$ , tq. (0,5)

$$U_y \cap \Pi_2 = g_2^{-1}(\{0\}).$$

Posons  $U_{(x,y)} = U_x \times U_y$  et

$$g: U_{(x,y)} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2 - (d_1+d_2)} \quad (0,5)$$

$$(x, y) \mapsto g(x, y) = (g_1(x), g_2(y))$$

On a  $U_{(x,y)} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ,  $(x, y) \in U_{(x,y)}$  qui est un ouvert. (0,25)

et  $g$  est de classe  $\min(k_1, k_2)$  car  $g_1 \in C^{k_1}$ ,  $g_2 \in C^{k_2}$ .

$g$  est une submersion car

$$J_{g(x,y)} = \begin{pmatrix} J_{x,g_1} & 0 \\ 0 & J_{y,g_2} \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

Comme  $\text{rg}(g_1) = n_1 - d_1$  et  $\text{rg}(g_2) = n_2 - d_2$  donc  $\text{rg } g = (n_1+n_2) - (d_1+d_2)$  (0,25)

$$\begin{aligned}
\text{Enfin, } \bar{g}^{-1}(\{0\}) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2-(d_1+d_2)} : g(x, y) = 0 \right\} \\
&= \left\{ (x, y) : (g_1(x), g_2(y)) = (0_{\mathbb{R}^{n_1-d_1}}, 0_{\mathbb{R}^{n_2-d_2}}) \right\} \\
&= \left\{ (x, y) : g_1(x) = 0_{\mathbb{R}^{n_1-d_1}}, g_2(y) = 0_{\mathbb{R}^{n_2-d_2}} \right\} \\
&= g_1^{-1}(\{0\}) \times g_2^{-1}(\{0\}) \quad (0,5) \\
&= (U_x \times \Pi_1) \times (U_y \times \Pi_2) \\
&= (U_x \times U_y) \times (\Pi_1 \times \Pi_2) \\
&= U_{(x,y)} \times (\Pi_1 \times \Pi_2).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Pi_1 \times \Pi_2$  est le s.v. de  $d_1, d_1+d_2$  et de classe  $\min(k_1, k_2)$ . (0,25)

2) On a  $u$  est un ouvert donc une sous variété de  $\mathbb{R}^{d_1}$  de dimension  $d_1$  et de classe  $C^\infty$ .

et  $\{v\}$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^{n-d_1}$  de  $d_1=0$  et de classe  $C^\infty$ . Par la question 1),  $u \times \{v\}$  est une sous variété de dimension  $d_1$ , de  $\mathbb{R}^n$  et de classe  $C^\infty$ . (0,25)

II/  $\hookrightarrow$  Soit l'application

$$\begin{aligned}
g: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, y, z) &\longmapsto (4x^2(x^2-1) + y^2)^2 + z^2 - \frac{1}{4}
\end{aligned} \quad (0,5)$$

On a  $g \in C^\infty$  et  $\tilde{g}^{-1}(\{0\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (4x^2(x^2-1)+y^2)^2 + z^2 = \frac{1}{4}\}$   
 $= \Pi = \Pi \cap \mathbb{R}^3$  (0,25)

et  $\tilde{D}_{(x,y,z)} g = (16x(4x^2(x^2-1)+y^2)(2x^2-1), 4y(4x^2(x^2-1)+y^2), 2z)$  (0,5)

• Si  $z \neq 0$ : alors  $\tilde{r}_g(g) = 1$  et donc  $g$  est une submersion. (0,5)

• Si  $z = 0$  et  $y \neq 0$ : on a  $4y(4x^2(x^2-1)+y^2) \neq 0$   
 donc  $\tilde{r}_g(g) = 1$  et  $g$  est une submersion. (0,5)

• Si  $z = 0$  et  $y = 0$ : pour que  $\tilde{r}_g(g) = 0$  il faut (0,25)  
 que  $64x^3(x^2-1)(2x^2-1) = 0$  i.e.  $x = 0$  ou  $x = \pm 1$ ,  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 or les points  $(0,0,0)$ ,  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) \notin \Pi$ , donc  $\tilde{r}_g(g) = 1$   
 et alors  $g$  est une submersion en tout point de  $\Pi$  (0,25)

Ainsi  $\Pi$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^\infty$  et  
 de dimension 2. (0,25)

2) Pour tout  $(x, y, z) \in \Pi$ , on a

$$T_{(x,y,z)} \Pi = \text{Ker } dg_{(x,y,z)} \quad (0,5)$$

$$= \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3; dg_{(x,y,z)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0\} \quad (0,5)$$

$$= \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (16x(4x^2(x^2-1)+y^2)(2x^2-1), 4y(4x^2(x^2-1)+y^2), 2z) \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = 0\}$$

$$= \left\{ (16x(4x^2(x^2-1)+y^2)(2x^2-1), 4y(4x^2(x^2-1)+y^2), 2z) \right\}^\perp. \quad (0,5)$$

3) Soit  $N: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\textcircled{0,25} (x, y, z) \longmapsto (16x(4x^2(x^2-1)+y^2)(2x^2-1), 4y(4x^2(x^2-1)+y^2), 16y^2(2x^2-1))$$

qui est une app. continue et pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$N(x, y, z)$  est un vecteur normal à  $T_{(x, y, z)} \Pi$ .

donc  $N$  définit une orientation pour  $\Pi$   $\textcircled{0,25}$

Exo 28 (10pts)

Soit la 1-forme différentielle  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}^2$  donnée par

$$\alpha = \frac{x}{1+x^2+y^2} dx + \frac{y}{1+x^2+y^2} dy$$

et  $\beta$  la 1-forme diff. sur  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\beta = \cos(xy) dx + \sin(xy) dy$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \alpha \wedge \beta &= -y \sin(xy) \underbrace{dx \wedge dx}_0 - x \sin(xy) \overbrace{dy \wedge dx}^{-dx \wedge dy} \\ &\quad + y \cos(xy) dx \wedge dy + x \cos(xy) \underbrace{dy \wedge dy}_0 \quad \textcircled{0,25} \\ &= (x \sin(xy) + y \cos(xy)) dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

$$\alpha \wedge \beta = \frac{x \sin(xy)}{1+x^2+y^2} dx \wedge dy + \frac{y \cos(xy)}{1+x^2+y^2} dy \wedge dx$$

$$= \frac{x \sin(xy) - y \cos(xy)}{1+x^2+y^2} dx \wedge dy. \quad \textcircled{0,25}$$

[4/4]

$$d(\alpha \wedge \beta) = 0 \quad \text{car} \quad d(\alpha \wedge \beta) \in \Omega^3(\mathbb{R}^2) = \{0\}. \quad (0,5)$$

$$2) \quad \text{On a} \quad d\alpha = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} dy \wedge dx - \frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0 \quad (0,75)$$

alors  $\alpha$  est fermée et puisque  $\mathbb{R}^2$  est convexe, alors  $\alpha$  admet une primitive sur  $\mathbb{R}^2$  (Poincaré). (0,25)

3) Soit  $f$  la primitive de  $\alpha$ , donc  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  et (0,25)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{1+x^2+y^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \quad (0,5)$$

$$\text{alors} \quad f(x,y) = \int \frac{x}{1+x^2+y^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2+y^2) + g(y) \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{1+x^2+y^2} + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow g(y) = c.$$

$$\text{Donc} \quad f(x,y) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2+y^2) + c; \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \quad (0,25)$$

4) Soit  $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$ ,  $\partial$  son bord

$$\omega = xy^2 dx + 2xy dy. \quad \int_{\partial} \omega = ?$$

$$\text{On a} \quad P(x,y) = xy^2, \quad Q(x,y) = 2xy. \quad (0,5)$$

Par la formule de Green-Riemann, on a (0,25)

$$\int_K \omega = \iint_K (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy \quad (0,5)$$

$$= \iint_K (2y - 2xy) dx dy \quad (0,5)$$

en passant aux coordonnées polaires,  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (0,5)$

$$(x, y) \in K \Leftrightarrow 0 < r \leq 1, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (\cos \theta \geq 0, \sin \theta \geq 0) \quad (0,5)$$

alors,  $\int_K \omega = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r \sin \theta - 2r^2 \sin \theta \cos \theta) r d\theta dr \quad (0,5)$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r^2 \sin \theta - r^3 \sin 2\theta) d\theta dr = \int_0^1 \left( -2r^2 \cos \theta + \frac{r^3}{2} \cos 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \int_0^1 (-r^3 + 2r^2) dr = -\frac{1}{4} r^4 + \frac{2}{3} r^3 \Big|_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} \quad (0,25)$$