Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département d'informatique

Année universitaire 2025-2026

Analyse 1

par
Yasmina Daikh

Chapitre 1

Le corps des nombres réels

1.1 Les ensembles de nombres usuels

Les nombres naturels $\mathbb{N}$

— **Définition :** Ce sont les entiers positifs ou nuls : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

— **Remarque :** l'addition et la multiplication sont définies dans $\mathbb{N}$, mais pas la soustraction.

— **Exemples :** $3 \in \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{N}$, mais $-1 \notin \mathbb{N}$

Les entiers relatifs $\mathbb{Z}$

- **Définition :** Ensemble des entiers positifs, négatifs et nuls : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- **Opérations :** Addition, soustraction, multiplication sont définies dans $\mathbb{Z}$
- **Exemples :** $-5 + 7 = 2$, $-3 \times 4 = -12$

Les nombres décimaux $\mathbb{D}$

- **Définition :** $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.
- **Propriétés fondamentales**

  — Tout nombre décimal admet un développement décimal fini.

  — L'ensemble $\mathbb{D}$ est stable pour l'addition et la multiplication.

  — La division n'est pas stable dans $\mathbb{D}$

- Exemples :

$$\begin{aligned}
0,25 &= \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \in \mathbb{D} \\
-3,7 &= -\frac{37}{10} \in \mathbb{D} \\
5 &= \frac{5}{1} = \frac{50}{10} \in \mathbb{D} \\
0,001 &= \frac{1}{1000} \in \mathbb{D}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= 0,333\ldots \notin \mathbb{D}\\
\pi &= 3,1415926535\ldots \notin \mathbb{D}\\
\sqrt{2} &= 1,4142135623\ldots \notin \mathbb{D}\\
\frac{1}{7} &= 0,142857142857\ldots \notin \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$

- **Définition :** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*,\ q \neq 0 \right\}$
- **Remarque :** Tous les nombres décimaux périodiques sont rationnels.
- **Exemples :** $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$, $0,\overline{3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

Les nombres irrationnels

- **Définition :** Ce sont les nombres réels qui ne peuvent pas s'écrire comme quotient d'entiers.
- **Exemples :** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$, $e \notin \mathbb{Q}$

Les réels ($\mathbb{R}$)

- **Définition :** Un nombre réel est un nombre rationnel ou irrationnel.
- On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- l'ensemble des nombres irrationnels est noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{R}$ est un ensemble continu c'est à dire entre deux réels, il en existe toujours un autre.
- **Exemples :** $2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On note par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

et par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

1.2 $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif

L'ensemble $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication, vérifie les axiomes suivants :

Axiomes de l'addition $(+)$

Soient a, b, c des éléments quelconques de $\mathbb{R}$.

(A1) **Associativité :** $(a + b) + c = a + (b + c)$

(A2) **Commutativité :** $a + b = b + a$

(A3) **Élément neutre :** Il existe un unique élément de $\mathbb{R}$, noté 0, tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = 0 + a = a$.

(A4) **Symétrie :** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique élément de $\mathbb{R}$, noté $-a$, tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Axiomes de la multiplication ($\times$)

Soient a, b, c des éléments quelconques de $\mathbb{R}$.

(M1) **Associativité :** $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

(M2) **Commutativité :** $a \times b = b \times a$

(M3) **Élément neutre :** Il existe un unique élément de $\mathbb{R}$, noté 1 (avec $1 \neq 0$), tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \times 1 = 1 \times a = a$.

(M4) **Symétrie :** Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$), il existe un unique élément de $\mathbb{R}$, noté a^{-1} ou $\frac{1}{a}$, tel que $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$.

Axiome de distributivité

(D) **Distributivité :** Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

La vérification de ces 9 axiomes confère à $(\mathbb{R}, +, \times)$ la structure de **corps commutatif**.

1.3 $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné

La relation binaire $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une **relation d'ordre total**. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(O1) **Réflexivité :** $a \leq a$

(O2) **Antisymétrie :** Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$

(O3) **Transitivité :** Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$

(O4) **Totalité :** On a $a \leq b$ ou $b \leq a$ (ou les deux).

La structure algébrique (corps) et la structure d'ordre sont **compatibles** :

— **Compatibilité avec l'addition :** Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\text{Si } a \leq b, \text{ alors } a + c \leq b + c$$

— **Compatibilité avec la multiplication :** Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } 0 \leq c, \text{ alors } a \times c \leq b \times c$$

De cette structure fondamentale, on déduit des propriétés essentielles :

— Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

— Si $a \leq b$ et $c < 0$, alors $a \times c \geq b \times c$.

— Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geq 0$. En particulier, $1 = 1^2 > 0$.

Remarque. *À partir de la relation (inférieur ou égal $\leq$) définie précédemment, on peut définir sa relation symétrique (supérieur ou égal $\geq$) de la manière suivante :*

Pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}$; $x \geq y$ si et seulement si $y \leq x$. La relation $\geq$ est aussi une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

On définit la relation (strictement inférieur $<$) par : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ si et seulement si $(x \leq y)$ et $(x \neq y)$.

Et la relation (strictement supérieur $>$) par : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y$ si et seulement si $(x \geq y)$ et $(x \neq y)$.

1.4 Intervalles

Définition 1.4.1. *Soit I une partie de $\mathbb{R}$. I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$ si et seulement si :*

$$\forall x, y \in I, \forall c \in \mathbb{R}; x \leq c \leq y \Longrightarrow c \in I.$$

Remarque. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$:*

- *L'intersection $I \cap J$ est un intervalle*
- *La réunion $I \cup J$ n'est pas toujours un intervalle*
- *Le complémentaire $\mathbb{R} \setminus I$ n'est pas un intervalle (sauf si $I = \varnothing$ ou $I = \mathbb{R}$)*

Exemples d'intervalles :

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle fermé).

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle ouvert).

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (intervalle semi-ouvert à droite).

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (intervalle semi-ouvert à gauche).

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

$\varnothing$ (l'ensemble vide est un intervalle).

Contre-exemples (non-intervalles)

$[0, 1] \cup [2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1$ ou $2 \leq x \leq 3\}$.

$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ est rationnel$\}$.

$\mathbb{R} \setminus 0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

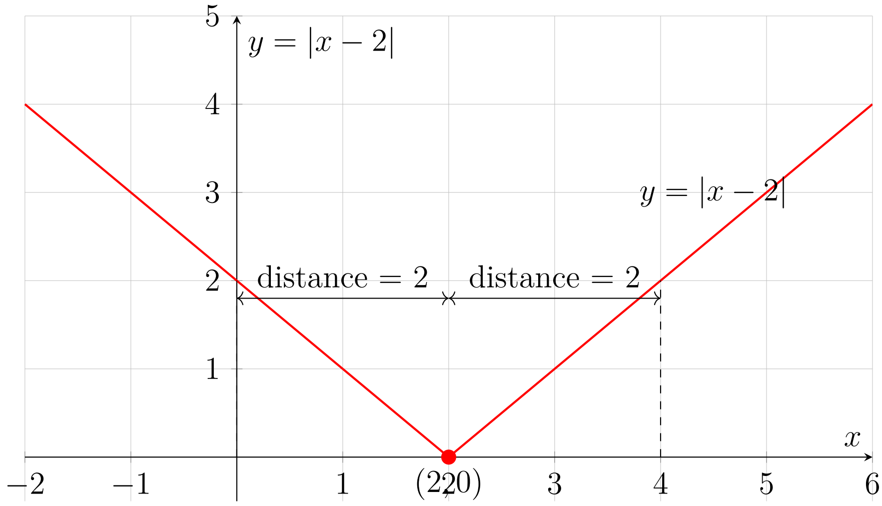
$[0, 1] \setminus \frac{1}{2} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1, x \neq \frac{1}{2}\}$.

1.5 Valeur absolue, partie entière

Définition 1.5.1. *(Valeur absolue) La valeur absolue d'un nombre réel x, notée $|x|$, est définie par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Interprétation géométrique :
La valeur absolue $|x|$ représente la distance du nombre x à l'origine sur la droite réelle. Plus généralement, $|x - a|$ représente la distance entre x et a sur la droite réelle.



Ce graphique montre que $|x-2|$ représente la distance entre x et 2.

Proposition 1.5.1. *(Quelques propriétés de la valeur absolue) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

i) : $|x| \geq 0$.

ii) : $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

iii) : *Soit $a \geq 0$ alors :*

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

iv) : $|xy| = |x||y|$.

v) : $|x+y| \leq |x| + |y|$. *(inégalité triangulaire)*

vi) : $||x| - |y|| \leq |x+y|$.

Preuve : Démontrons l'inégalité triangulaire v). Utilisons la propriété suivante :

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{et} \quad -|y| \leq y \leq |y|$$

En additionnant ces inégalités membre à membre, on obtient :

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Ce qui équivaut à (d'après iii)) :

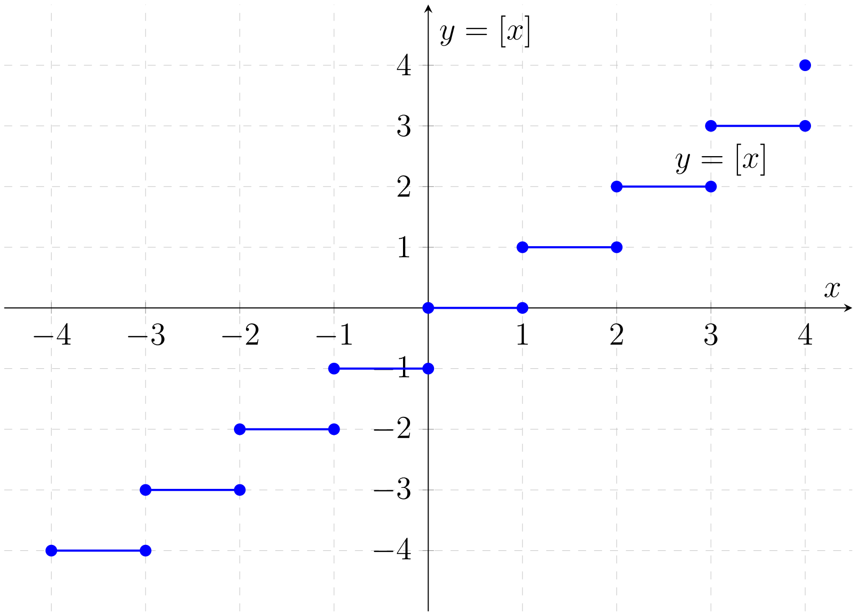
$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

□

Définition 1.5.2. *(définition et caractérisation de la partie entière d'un nombre réel) Soit x un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la partie entière de x. Nous le noterons $E(x)$ ou $[x]$. Autrement dit, $[x]$ est l'unique entier qui vérifie :*

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Exemples : $[5.32] = 5$, $[\pi] = 3$, $[-2.57] = -3$, $[8] = 8$, $[-10] = -10$.



Le graphe de la fonction partie entière

Proposition 1.5.2.

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a :* $[x+n] = [x] + n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *on a :* $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

Preuve : Démontrons 2. : Par définition de la partie entière, on a :

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{et} \quad [y] \leq y < [y] + 1$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient :

$$[x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2$$

Notons $n = [x] + [y]$. On a donc :

$$n \leq x + y < n + 2$$

Soit $k := [x+y]$. Par définition de la partie entière, on a :

$$k \leq x + y < k + 1$$

Combinons ces deux encadrements :

$$n \leq x + y < k + 1 \quad \text{et} \quad k \leq x + y < n + 2$$

De la première inégalité $n \leq x + y < k + 1$, on déduit que $n < k + 1$, donc $n \leq k$ (car n et k sont des entiers).

De la deuxième inégalité $k \leq x + y < n + 2$, on déduit que $k < n + 2$, donc $k \leq n + 1$ (car k et n sont des entiers).

Ainsi, on a :

$$n \leq k \leq n + 1$$

C'est-à-dire :

$$[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$$

.

Ce qui complète la démonstration. $\square$

1.6 Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.6.1. *(Majorant, minorant) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Un réel $M \in \mathbb{R}$ est un* ***majorant*** *de A si :*

$$\forall x \in A,\ x \leq M.$$

- *L'ensemble A est dit* ***majoré*** *s'il admet au moins un majorant.*
- *Un réel $m \in \mathbb{R}$ est un* ***minorant*** *de A si :*

$$\forall x \in A,\ m \leq x.$$

- *L'ensemble A est dit* ***minoré*** *s'il admet au moins un minorant.*
- *Un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ est dit* ***borné*** *s'il est à la fois* **majoré** *et* **minoré** *c'est à dire*

$$A \text{est borné} \Longleftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R} \text{ tels que } m \leq x \leq M,\ \forall x \in A.$$

Définition 1.6.2. ***(Minimum et maximum d'un ensemble)*** *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Le minorant de A qui appartient à A est appelé le* ***plus petit élément*** *ou* ***minimum*** *de A. On le note* $\min(A)$*. C'est-à-dire :*

$$m = \min(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A, \text{ et} \\ m \in A \end{cases}$$

- *Le majorant de A qui appartient à A est appelé le* ***plus grand élément*** *ou* ***maximum*** *de A. On le note* $\max(A)$*. C'est-à-dire :*

$$M = \max(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A, \text{ et} \\ M \in A. \end{cases}$$

Exemples :

1) : Soit $A = [2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$.

- 5 est un majorant de A, puisque $\forall x \in A, x \leq 5$. Tous les réels $M \geq 5$ sont des majorants de A.
- 2 est un minorant de A, puisque $\forall x \in A, x \geq 2$. Tous les réels $m \leq 2$ sont des minorants de A.
- $\max(A) = 5$, puisque 5 est un majorant et $5 \in A$.
- $\min(A) = 2$, puisque 2 est un minorant et $2 \in A$.

2) : Soit $B =]0, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

- Tous les réels $M \geq 1$ sont des majorants de B.
- Tous les réels $m \leq 0$ sont des minorants de B.
- $\max(B)$: n'existe pas.
- $\min(B)$: n'existe pas.

3) : Soit $C = \{-1, 0, 3, 7\}$

- Tous les réels $M \geq 7$ sont des majorants de C.
- Tous les réels $m \leq -1$ sont des minorants de C.
- $\max(C) = 7$.
- $\min(C) = -1$.

4) : Soit $D = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

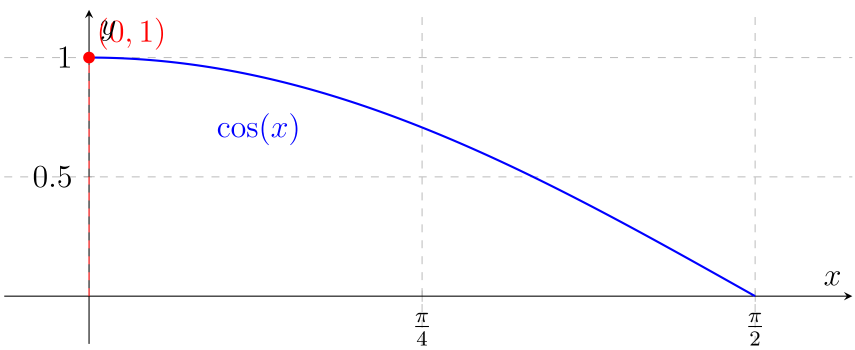
- Il n'existe pas de majorants de D. On dit que D est un ensemble non majoré.
- Tous les réels $m \leq 0$ sont des minorants de l'ensemble D.
- $\max(D)$ n'existe pas, puisque D n'est pas majoré.
- $\min(D) = 0$, puisque 0 est un minorant et $0 \in D$.

5) : Soit $E = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$

- Tous les réels $M \geq 1$ sont des majorants de l'ensemble E.
- Tous les réels $m \leq 0$ sont des minorants de E.
- $\max(E) = 1$.
- $\min(E)$ n'existe pas.

6) : Soit $F = \left\{\cos(x) \mid x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(x) \leq 1$ donc 1 est un majorant de C. Pour $x = 0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(0) = 1 \in C$. Donc 1 est bien le $\max(C)$.



Définition 1.6.3. *(Bornes supérieure et inférieure)*

***Le plus grand minorant** de A est appelé la **borne inférieure** de A. On le note par $\inf(A)$. C'est-à-dire :*

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A, \text{ et} \\ m \text{ est le plus grand minorant de } A. \end{cases}$$

***Le plus petit majorant** de A est appelé la **borne supérieure** de A. On le note par $\sup(\mathbf{A})$. C'est-à-dire :*

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A, \text{ et} \\ M \text{ est le plus petit majorant de } A. \end{cases}$$

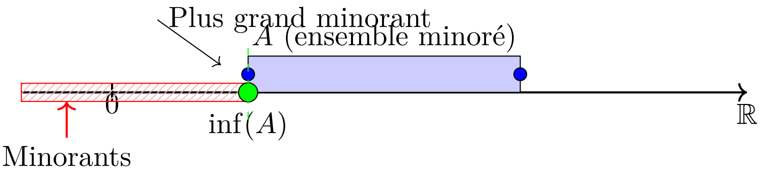
Exemples.

1) : Soit $A = [0,1[$. Les majorants de A sont tous les réels $M \geq 1$. Le plus petit des majorants est $\sup A = 1$.

2) : Soit $B =]2, +\infty[$. L'ensemble des minorants est $]-\infty, 2]$. Le plus grand des minorants est 2. Donc $\inf B = 2$.

Théorème 1.6.4. *Toute partie non vide et majorée $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure. C'est-à-dire : Quel que soit $A \subset \mathbb{R}$ avec $A \neq \emptyset$; si A est majoré alors $\sup(A)$ existe dans $\mathbb{R}$.*

Corollaire 1.6.5. *Toute partie non vide et minorée $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne inférieure. C'est-à-dire : Quel que soit $A \subset \mathbb{R}$ avec $A \neq \emptyset$; si A est minoré alors $\inf(A)$ existe dans $\mathbb{R}$.*



Exemple : $A = [2,5] \Rightarrow \inf(A) = 2$

Théorème 1.6.6. *(Caractérisation des bornes inférieures et supérieures)*
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soient $m, M \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf A \iff \begin{cases} 1. & \forall a \in A,\ a \geq m, \\ 2. & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } a < m + \varepsilon. \end{cases}$$

$$M = \sup A \iff \begin{cases} 1. & \forall a \in A,\ a \leq M, \\ 2. & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } a > M - \varepsilon. \end{cases}$$

Preuve :

Preuve pour la borne inférieure :

($\Rightarrow$) Si $m = \inf A$, alors par définition m est le plus grand minorant. La condition (1) est donc vérifiée. Pour la condition (2), supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall a \in A,\ a \geq m + \varepsilon_0$. Alors $m + \varepsilon_0$ serait un minorant de A plus grand que m, ce qui contredit le fait que m est le plus grand minorant.

($\Leftarrow$) Supposons que m vérifie les deux conditions. La condition (1) montre que m est un minorant. Montrons que c'est le plus grand. Soit m' un autre minorant de A. Si $m' > m$, prenons $\varepsilon = m' - m > 0$. Par la condition (2), il existe $a \in A$ tel que $a < m + \varepsilon = m'$, ce qui contredit que m' est un minorant. Donc $m' \leq m$ pour tout minorant m', et ainsi $m = \inf A$.

Preuve pour la borne supérieure :

($\Rightarrow$) Si $M = \sup A$, alors par définition M est le plus petit majorant. La condition (1) est donc vérifiée. Pour la condition (2), supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall a \in A,\ a \leq M - \varepsilon_0$. Alors $M - \varepsilon_0$ serait un majorant de A plus petit que M, ce qui contredit le fait que M est le plus petit majorant.

($\Leftarrow$) Supposons que M vérifie les deux conditions. La condition (1) montre que M est un majorant. Montrons que c'est le plus petit. Soit M' un autre majorant de A. Si $M' < M$, prenons $\varepsilon = M - M' > 0$. Par la condition (2), il existe $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon = M'$, ce qui contredit que M' est un majorant. Donc $M' \geq M$ pour tout majorant M', et ainsi $M = \sup A$. $\square$

Cas particuliers :

- Si $\sup A \in A$, alors $\sup A = \max A$. Si $\inf A \in A$, alors $\inf A = \min A$.
- Si A admet un maximum alors $\sup(A) = \max(A)$. Si A admet un minimum alors $\inf A = \min A$.

Exemples :

1) : Soit $A = \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que $\inf A = 0$ en utilisant la caractérisation de la borne inférieure. Déterminer $\sup A$.

Solution :

- $\inf A = 0$ car :

$$\begin{cases} 1. \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \geq 0 \\ 2. \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{n_0} < \varepsilon = 0 + \varepsilon. \text{ En effet, il suffit de choisir } n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1. \end{cases}$$

- $\sup A = ?$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \leq 1.$$

Donc 1 est un majorant de A. De plus, comme $1 \in A$, on a $\sup A = \max A = 1$.

2) : Soit $B = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Déterminer $\inf C$ puis montrer que $\sup C = 1$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.

Solution :

- Il est clair que 0 est un minorant puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{n+1} \geq 0.$$

De plus, comme $0 \in C$, on a $\inf C = \min C = 0$.

- $\sup C = 1$ car :

$$\begin{cases} 1. \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{n+1} < 1 \\ 2. \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{n_0}{n_0+1} > 1 - \varepsilon. \text{ En effet, il suffit d'écrire} \\ \quad\quad \frac{n_0}{n_0+1} = 1 - \frac{1}{n_0+1} > 1 - \varepsilon \text{ et choisir par exemple } n_0 = [|\frac{1}{\varepsilon} - 1|] + 1. \end{cases}$$

Ici, $1 \notin C$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n+1} < 1$, donc $\sup C$ n'est pas un maximum.

1.7 Propriété d'Archimède dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.7.1. *(Propriété d'Archimède) Pour tout nombre réel $x > 0$ et tout nombre réel y, il existe un entier naturel n tel que :*

$$n \cdot x > y$$

Preuve :

Soient $x > 0$ et y des réels quelconques. Supposons par l'absurde que pour tout entier naturel n, on ait $n \cdot x \leq y$.

Alors l'ensemble $A = \{n \cdot x \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par y. Comme A est non vide ($0 \in A$) et majoré, il admet une borne supérieure $M = \sup A$.

Puisque $x > 0$, $M - x < M$, donc $M - x$ n'est pas un majorant de A. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \cdot x > M - x$$

Mais alors $(n + 1) \cdot x > M$, ce qui contredit que M est un majorant de A. □

Interprétation géométrique : La propriété d'Archimède exprime le fait qu'en partant d'un segment de longueur x et en le reportant suffisamment de fois, on peut dépasser n'importe quelle longueur y donnée à l'avance.

La propriété d'Archimède peut s'exprimer de plusieurs manières équivalentes :

1. Pour tout réel $x > 0$, il existe un entier n tel que $n > x$.
2. Pour tout réel x, il existe un entier n tel que $n > x$.
3. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.
4. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Corollaire 1.7.2. *(Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) Entre deux réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel.*

Corollaire 1.7.3. *Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de nombres rationnels.*

Bibliographie

1. J.-M. Monier, *Analyse PCSI-PTSI*, Dunod, Paris, 23.
2. Y. Bougrov et S. Nikolski, *Cours de Mathématiques Supérieures*, Éditions Mir, Moscou, 1983.
3. N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral, Tome 1*, Éditions Mir, Moscou, 1980.
4. K. Allab, *Éléments d'Analyse*, OPU, Alger, 1984.
5. B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *Cours d'analyse*, Librairie Armand Colin, Paris, 1976.
6. J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques, tome 2*, Édition Dunod, 1978.