

Série de TD n° 1 : Le corps des nombres réels

Exercice 1 :

I) : Soit le nombre $x = 2,345454545\dots =: 2,3\overline{45}$.

1. Soit $y = 0,4\overline{5}$. Calculer $100y$ puis $100y - y$. En déduire que $y = \frac{45}{99}$.
2. Exprimer x en fonction de y .
3. En déduire que x est un nombre rationnel et donner son écriture fractionnaire.

II) : **Généralisation** : Soit $x \in \mathbb{R}$ dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang : $x = a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_k \overline{c_1 c_2 \dots c_p}$, où $\overline{c_1 c_2 \dots c_p}$ désigne la période de longueur p .

1. On note $y = 0, \overline{c_1 c_2 \dots c_p}$.
 - (a) Montrer que $10^p \times y = N + y$ où $N = c_1 c_2 \dots c_p$.
 - (b) En déduire l'écriture fractionnaire de y .
2. Montrer que x peut s'écrire :

$$x = \text{partie entière} + \frac{\text{partie décimale non périodique}}{10^k} + \frac{y}{10^k}$$

et conclure que x est un nombre rationnel.

3. **Application** : Donner l'écriture fractionnaire des nombres suivants :

$$x_1 = 0, \overline{7} \quad x_2 = 1, \overline{25} \quad x_3 = 3, 12\overline{4}.$$

Exercice 2 :

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.
2. Montrer par l'absurde la proposition suivante :

Si a est un réel tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $|a| < \varepsilon$, alors $a = 0$.

Exercice 3 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|2|x| - 3| = 2|x - 1|$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x + 12| \leq |x^2 - 8|$.

Exercice 4 : Démontrer que pour tous réels x et y :

1. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
2. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

Exercice 5 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $E(x)$ la partie entière de x .
 - (a) Démontrer que $E(x + n) = E(x) + n$, $n \in \mathbb{Z}$.
 - (b) Application numérique : Calculer $E(\pi + 5)$, $E(-2.3 + 7)$, et $E(\sqrt{2} - 10)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $E(\sqrt{n^2 + n}) = n$.

Exercice 6 : Soit n un entier naturel.

1. Développer $(3 + \sqrt{5})^n$ et $(3 - \sqrt{5})^n$.
2. En déduire que $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair.
3. Montrer que $E((3 + \sqrt{5})^n)$ est un entier impair.

Exercice 7 : Partie 1 : Soient B et C deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On considère $A = B \cup C$.

1. Montrer que si B et C sont bornées alors A est bornée.
2. Montrer que $\sup(A) = \max(\sup(B), \sup(C))$.
3. Montrer que $\inf(A) = \min(\inf(B), \inf(C))$ (laissée aux étudiants).

Partie 2 : On considère l'ensemble : $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

3. Décomposer A sous la forme d'une union de deux ensembles B et C que l'on précisera.
4. En utilisant les résultats de la Partie 1, démontrer que A est borné puis déterminer $\sup(A)$ et $\inf(A)$.
5. Déterminer $\max(A)$ et $\min(A)$ s'ils existent.

Exercice 8 :

1. Enoncer la propriété d'Archimède.
2. Montrer que pour tout réel x , il existe un entier n tel que $n > x$.
3. En déduire que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré
4. Soit $A = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
 - (a) Montrer que A est minoré, déterminer $\inf A$ et $\min A$.
 - (b) Utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que A n'est pas majoré.

Exercice 9 : En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de rationnels telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x.$$