Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département d’informatique

Année universitaire 2025-2026

Analyse 1

par
Yasmina Daikh

Chapitre 2

Les nombres complexes

Les nombres complexes constituent une extension des nombres réels qui permet de résoudre des équations qui n'ont pas de solutions réelles.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1. *Un nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$z = a + ib$$

où :

- $a, b \in \mathbb{R}$.
- i *est l'unité imaginaire vérifiant* $i^2 = -1$.
- $a = Re(z)$ *est la partie réelle.*
- $b = Im(z)$ *est la partie imaginaire.*

L'ensemble des nombre complexes est notée $\mathbb{C}$.

Propriétés 2.1.2. *Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$:*

- ***Addition :*** $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- ***Soustraction :*** $z - z' = (a - a') + i(b - b')$
- ***Multiplication :***

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \end{aligned}$$

- ***Conjugué :*** $\overline{z} = a - ib$
- ***Division :*** *Pour* $z' \neq 0$,

$$\frac{z}{z'} = \frac{z \cdot \overline{z'}}{z' \cdot \overline{z'}} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{a'^2 + b'^2}$$

- ***Egalité des nombres complexes :*** $z = z' \quad \Longleftrightarrow \quad a = a' \quad \text{et} \quad b = b'$

Exemples 2.1.3. *Soient* $z = 2 + 3i$ *et* $z' = 1 - 2i$

$$\begin{aligned}
z + z' &= (2+1) + (3-2)i = 3 + i \\
z - z' &= (2-1) + (3-(-2))i = 1 + 5i \\
z \times z' &= (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)) + i(2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1) \\
&= (2+6) + i(-4+3) = 8 - i \\
\overline{z} &= 2 - 3i \\
\frac{z}{z'} &= \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+3i+6i^2}{1+4} \\
&= \frac{2+7i-6}{5} = \frac{-4+7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i
\end{aligned}$$

Définition 2.1.4. *(Module) Le module de* $z = a + ib$ *est défini par :*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Propriétés 2.1.5.

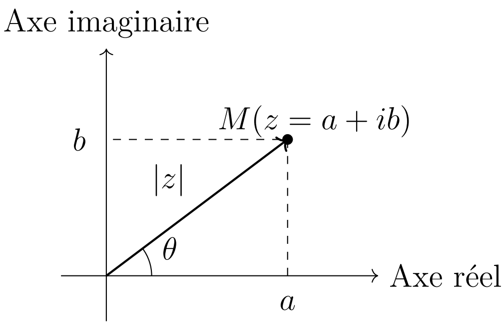
1. $|z| \geq 0$ *et* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
3. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.
4. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *pour* $z' \neq 0$.
5. *Inégalité triangulaire :* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Exemples 2.1.6.

1. *Pour* $z = 3 + 4i$
$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
2. *Pour* $z = 1 - i$
$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
3. *Vérification pour* $z = 2 + i$ *et* $z' = 1 - 3i$
$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \\
|z'| &= \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \\
z \cdot z' &= (2+i)(1-3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 = 5 - 5i \\
|z \cdot z'| &= \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \\
|z| \cdot |z'| &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}
\end{aligned}$$

2.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan d'Argand-Caussel, le nombre complexe $z = a + ib$ est représenté par le point $M(a, b)$ ou par le vecteur $\vec{OM}$.



2.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 2.3.1. *Pour $z = a + ib \neq 0$, on a :*

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $\theta = \arg(z)$ est l'argument de z, défini modulo 2π,
avec

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \quad \textit{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

Exemples 2.3.2.

1. $z = 1 + i$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \theta &= \frac{\pi}{4} \quad \textit{modulo } 2\pi \\ z &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

2. $z = -1 + i\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2 \\ \cos\theta &= -\frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \theta &= \frac{2\pi}{3} \quad \textit{modulo } 2\pi \\ z &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

3. $z = -i$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \\ \cos\theta &= 0 \\ \sin\theta &= -1 \\ \Rightarrow \theta &= -\frac{\pi}{2} \quad \textit{modulo } 2\pi \\ z &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

2.4 Formules d'Euler et forme exponentielle

2.4.1 Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Inversement :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2.4.2 Forme exponentielle

Tout nombre complexe non nul peut s'écrire :

$$z = re^{i\theta}$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

2.4.3 Propriétés de la forme exponentielle

- $e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\phi}} = e^{i(\theta-\phi)}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (Formule de Moivre)
- $|e^{i\theta}| = 1$.

Exemples 2.4.1.

1. Les fameuses identités d'Euler

$$e^{i\pi} = -1 \quad \textit{(Identité remarquable)}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \textit{(Identité d'Euler)}$$

2.

$$\begin{aligned} 1 + i &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ -1 + i\sqrt{3} &= 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ -i &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

2.5 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

La recherche des racines n-ièmes, c'est-à-dire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$\omega^n = z \quad \text{avec } z \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

est un problème fondamental. Contrairement au cas réel où un nombre peut avoir aucune, une ou deux racines, le corps des complexes $\mathbb{C}$ est algébriquement clos : tout polynôme de degré n y admet exactement n racines (comptées avec leur ordre de multiplicité). Ainsi, tout nombre complexe non nul z possède **exactement n racines n-ièmes distinctes**.

2.5.1 Les racines rarrées d'un nombre complexe (Cas $n = 2$)

Commençons par le cas particulier $n = 2$, qui peut être traité efficacement par identification.

Proposition 2.5.1. *Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) admet deux racines carrées dans $\mathbb{C}$.*

Preuve : méthode par identification : On cherche $\omega = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) tel que $\omega^2 = z$.

$$(x + iy)^2 = a + ib$$

En développant et en identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on lui adjoint une troisième équation en considérant le module. Puisque $|\omega^2| = |z|$, on a :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3)$$

En additionnant (1) et (3), on trouve $2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$, ce qui donne :

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

De même, en soustrayant (1) de (3), on trouve :

$$y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Conclusion : Les racines carrées de $z = a + ib$ sont :

$$\omega = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \cdot \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right)$$

où le signe de la partie imaginaire est choisi pour respecter l'équation (2) : le produit $2xy$ doit avoir le signe de b. $\square$

Exemple 2.5.1. *Trouver les racines carrées de* $z = 3 + 4i$.
On a $a = 3$, $b = 4$, *et* $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

$$x^2 = \frac{3+5}{2} = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$y^2 = \frac{-3+5}{2} = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

L'équation $2xy = 4 > 0$ *impose que* x *et* y *soient de même signe. Ainsi, les deux racines carrées sont* $\omega_1 = 2 + i$ *et* $\omega_2 = -2 - i$.

2.5.2 Cas général : racines n-ièmes

Pour $n \geq 3$, la méthode par identification devient très lourde. La méthode la plus puissante utilise la forme trigonométrique (ou exponentielle) des nombres complexes.

Théorème 2.5.2. *Soit* $z = re^{i\theta}$ *un nombre complexe non nul* ($r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$). *Alors les* n *racines* n*-ièmes distinctes de* z *sont données par :*

$$\boxed{\omega_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]}$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Preuve : On cherche $\omega = \rho e^{i\phi}$ tel que $\omega^n = z$.

$$(\rho e^{i\phi})^n = re^{i\theta} \Rightarrow \rho^n e^{in\phi} = re^{i\theta}$$

Par identification des modules et des arguments (modulo 2π), on obtient :

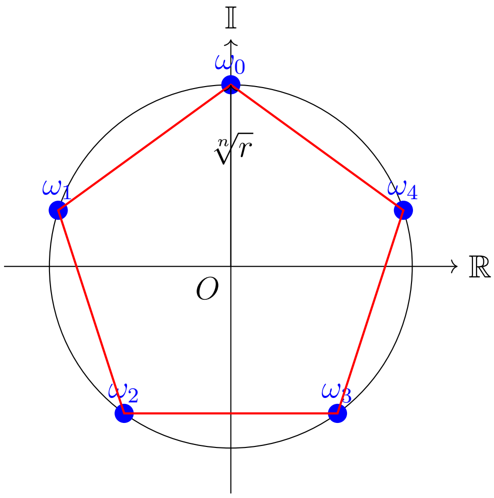
$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\phi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La première équation donne $\rho = \sqrt[n]{r}$ (la racine n-ième réelle positive). La seconde donne $\phi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Les valeurs de k sur un intervalle de longueur n (par exemple $k = 0, 1, \ldots, n-1$) donnent des arguments distincts modulo 2π, et donc n solutions distinctes. □

2.5.3 Interprétation géométrique et racines de l'unité

Les n racines n-ièmes de z ont une interprétation géométrique remarquable : - Elles ont **toutes le même module** $\sqrt[n]{r}$. - Leurs arguments forment une **progression arithmétique** de raison $\frac{2\pi}{n}$.

Ainsi, dans le plan complexe, les images de ces racines sont **les sommets d'un polygone régulier à n côtés**, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.



Exemple 2.5.3. *: racines cubiques de l'unité*

Cherchons les racines cubiques de 1 ($n = 3$). Ce sont les solutions de $\omega^3 = 1$. En appliquant la formule avec $r = 1$, $\theta = 0$:

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \quad \textit{pour } k = 0, 1, 2$$

$$\omega_0 = e^0 = 1, \quad \omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.6 Méthode de résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{C} \text{ et } a \neq 0.$$

Méthode de résolution :

1. **Calcul du discriminant** : $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. **Calcul des racines carrées de Δ :** on cherche les complexes δ tels que $\delta^2 = \Delta$.
3. **Formules des solutions** : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ.

Cas particulier : Si les coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors $\Delta \in \mathbb{R}$.

— Si $\Delta > 0$: 2 solutions réelles

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$: 1 solution réelle double

$$z = -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$: 2 solutions complexes conjuguées

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemples 2.6.1.

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :* $z^2 - 2z + 5 = 0$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16$$
$$z = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :* $z^2 - (3+i)z + (2+2i) = 0$.

$$\begin{aligned}\Delta &= (3+i)^2 - 4(1)(2+2i) = (9+6i+i^2) - (8+8i)\\ &= (8+6i) - (8+8i) = -2i\end{aligned}$$

Les racines carrées de $-2i$ sont : $w_0 = -1+i$ et $w_1 = 1-i$. Ainsi les solutions de l'équations sont :

$$z_1 = \frac{(3+i)+(-1+i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$
$$z_2 = \frac{(3+i)-(-1+i)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

2.7 Exercices :

Exercice 1 : Pour tout l'exercice, on considère le nombre complexe $z = 8i$.

1. **Forme trigonométrique**
   (a) Déterminer le module et un argument de z.
   (b) Écrire z sous forme trigonométrique.
2. **Racines cubiques**
   (a) Déterminer les trois racines cubiques de z.
   (b) Écrire ces racines sous forme algébrique $a + ib$.
   (c) Vérifier que la somme des trois racines cubiques est nulle.
3. **Interprétation géométrique**
   (a) Représenter dans le plan complexe les images des trois racines cubiques.
   (b) Montrer qu'elles forment un triangle équilatéral.

Corrigé de l'exercice 1 :

1. **Forme trigonométrique**
   (a) **Module et argument de** $z = 8i$:
   Le module est : $|z| = |8i| = 8$
   Un argument est : $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ car z est situé sur l'axe des imaginaires purs positifs.
   (b) **Forme trigonométrique** :

$$z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

2. (a) Les racines cubiques de z sont données par :

$$\omega_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right]$$

pour $k=0,1,2$

Soit : $\omega_k = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$

(b) **Forme algébrique** :

Pour $k=0$: $\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}+i$

Pour $k=1$: $\omega_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}+i$

Pour $k=2$: $\omega_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2\,(0-i) = -2i$

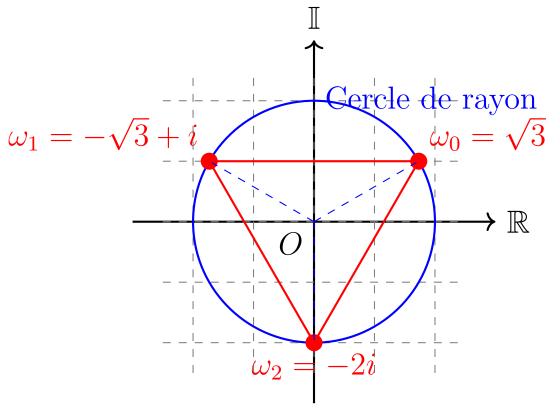
(c) **Vérification de la somme** :

$$\omega_0+\omega_1+\omega_2 = (\sqrt{3}+i)+(-\sqrt{3}+i)+(-2i) = 0.$$

La somme des racines cubiques est bien nulle.

3. **Interprétation géométrique**

(a) **Représentation graphique** :



(b) **Preuve que c'est un triangle équilatéral** :

Calculons les distances :

$$|\omega_0-\omega_1| = |(\sqrt{3}+i)-(-\sqrt{3}+i)| = |2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$
$$|\omega_1-\omega_2| = |(-\sqrt{3}+i)-(-2i)| = |-\sqrt{3}+3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$|\omega_2-\omega_0| = |(-2i)-(\sqrt{3}+i)| = |-\sqrt{3}-3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Tous les côtés mesurent $2\sqrt{3}$, donc le triangle est équilatéral.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4+4z^2+4=0$.

Corrigé de l'exercice 2 : On reconnaît une équation bicarrée. Posons $Z=z^2$:

$$Z^2+4Z+4=0$$

Discriminant : $\Delta = 16-16=0$, donc $Z=\frac{-4}{2}=-2$

On doit donc résoudre : $z^2=-2$

Forme trigonométrique de -2 : $-2 = 2(\cos\pi+i\sin\pi)$

Les racines carrées sont :

$$z_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right)\right]$$

pour $k = 0, 1$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{i\sqrt{2}}$$
$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \boxed{-i\sqrt{2}}$$

Ce sont des racines doubles.

Références

1. **Exo7**, *Cours et exercices de mathématiques*, [En ligne]. "Nombres Complexes". Disponible sur : https ://exo7.emath.fr/cours/ch_nombres_complexes.pdf.
2. **D. Perrin**, *Cours d'Algèbre*, Ellipses, 2004.
3. **C. Deschamps, F. Moulin, A. Warusfel et al.**, *Cours de Mathématiques - Algèbre 1*, Dunod, 2014.