الفصل الثاني: المجموعات، العلاقات و التطبيقات
Ensembles, relations et applications

1.2 المجموعات Ensembles

- **المجموعة Ensemble**

المجموعة مفهوم أساسي في جميع فروع الرياضيات، ويعتبر من المفاهيم الأولية التي لا تُعرَّف. لكنه يمكن تصور المجموعة على أنها طائفة (اوتجمع) من الأشياء **famille (ou rassemblement) d'objets** او الكائنات الموضوعة سوياً، وتسمى هذه الأشياء **عناصر (Eléments)** هذه المجموعة.

يرمز للمجموعة بالأحرف اللاتينية الكبيرة: ...,A, B, E, F و لعناصرها بأحرف صغيرة ... a, b, x, y وعادة ما تكتب المجموعة باستخدام طريقتين:

1. اما باعطاء عناصرها بين حاضنتين مثلا **E={a, b, c}**.
2. اما باعطاء **الخاصية المميزة** لعناصرها **E={x / p(x) }** حيث p(x) عبارة رياضية متعلقة بـمتغير x.

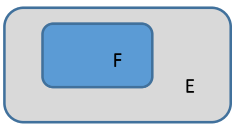
- **مجموعات أساسية:**

- $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ مجموعة الاعداد الطبيعية (entiers naturels)
- $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ مجموعة الاعداد الصحيحة او النسبية (entiers relatifs)
- $\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q}\,/\,p,q\in\mathbb{Z}\ et\ q\neq 0\}$ مجموعة الاعداد الكسرية او الناطقة (nombres rationnels ou fractions)
- مجموعة الاعداد الصماء (غير الناطقة) Irrationnels يرمز لها بـ $\mathbb{Q}'$ او $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ و *هي الاعداد التي* *<u>لا يمكن كتابتها</u> على شكل عدد ناطق. مثلا:* $\sqrt{2}$، $\sqrt{5}$) بشكل عام $\sqrt{a}$ حيث a عدد اولي) و الأعداد: π=3,141592... و e=2.71828...‎.
- مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (nombres réels)
- مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ (nombres complexes)

- **مفهوم الانتماء (Appartenance)** اذا كان a عنصرا من مجموعة E نكتب a∈E و تقرأ a ينتمي الى E.

- **مفهوم الاحتواء(Inclusion)**

نقول عن المجموعة F انها محتواة (inclus) بالمجموعة E و نكتب F⊂E اذا كانت كل عناصر F هي عناصر من E أي اذا تحقق الاستلزام: $\forall x: x\in F \Rightarrow x\in E$.



- **المساواة (Egalité)**

نقول عن الجموعة F انها مساوية (égale à) بالمجموعة E و نكتب $E = F$ اذا كانت $E \subset F$ و $E \supset F$ أي اذا تحقق التكافؤ: $(\forall x): x \in F \Leftrightarrow x \in E$

- **المجموعة الخالية** : هي المجموعة التي لا تشمل أي عنصر و يرمز لها بـ: $\{\}$ أو $\varnothing$.

ملاحظات. من اجل أي مجموعة E

1. لدينا $E \subset E$. لان الاستلزام : $\forall x: x \in E \Rightarrow x \in E$ صحيح دوما.
2. لدينا $\varnothing \subset E$. لان الاستلزام : $\forall x: x \in \varnothing \Rightarrow x \in E$ صحيح دوما.
3. المجموعة الخالية وحيدة.

بالفعل: نفرض وجود مجموعتين خاليتين $\varnothing_1, \varnothing_2$ عندئذ حسب 2) فان $\varnothing_1 \subset \varnothing_2$ و $\varnothing_2 \subset \varnothing_1$ ومنه $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

4. الاحتواء علاقة متعدية أي: من اجل أي مجموعات E, F, G فان $E \subset F \wedge F \subset G \Rightarrow E \subset G$

ينتج ذلك من كون الاستلزام علاقة متعدية.

- **المجموعات الجزئية و مجموعة الأجزاء Sous-ensemble et ensemble de parties**

تعريف لتكن E و A مجموعتين

نقول أن A **مجموعة جزئية** من المجموعة E إذا كانت $A \subset E$

تعريف

نسمي **مجموعة أجزاء** E ، المجموعة التي عناصرها أجزاء E ، ونرمز لها بـــ $P(E)$

أي أن $P(E) = \{A / A \subset E\}$ و $A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$.

ملاحظة:

1. كون $\varnothing \subset E$ و $\varnothing \subset E$ فان $\varnothing \in P(E)$ و $E \in P(E)$.
2. اذا كان عدد عناصر E هو n فان عدد عناصر $P(E)$ هو 2^n.

مثال.

1. $E=\{a, b, c\}$ فان: $P(E)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$

2. $E=\{1, \phi\}$ فان: $P(E)=\{\phi, \{1\}, \{\phi\}, E=\{1, \phi\}\}$

2.2 عمليات على المجموعات

نعتبر E، F مجموعتان.

التقاطع Intersection

نسمي تقاطع المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E \cap F = \{x \,/\, x \in E \wedge x \in F\}$$

الإتحاد Union

نسمي اتحاد المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E \cup F = \{x \,/\, x \in E \vee x \in F\}$$

مثال. E={a,2,c,3} و F={1,a,2,b}فان E⋂F={a,2} و E⋃F={1,a,2,b,3,c}.

الفرق Difference

نسمي الفرق بين المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E - F = \{x \,/\, x \in E \wedge x \notin F\}$$

مثال. E={a,2,c,3, d} و F={1,a,2,b} فان E-F={c,3,d} و F-E={1, b }

الفرق التناظري Difference symétrique

نسمي الفرق التناظري بين المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E \Delta F = (E \cup F) - (E \cap F)$$

مثال.

لدينا من المثال السابق EUF={1,2,3,a,b,c,d} و E∩F={a,2} و منه:

E∆F= EUF- E∩F={1,3,b,c,d}

الجداء الديكارتي Produit cartésien

لتكن E و F مجموعتين

تعريف : نسمي الجداء الديكارتي للمجموعتين E و F المجموعة التالية

$$E \times F = \{(a,b) / a \in E, b \in F\}$$

نسمي العنصر (a,b) ثنائية مرتبة ولدينا

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

بعض خواص الجداء الديكارتي

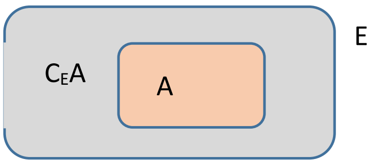
1. $E \times \phi = \phi$
2. $E \times F \neq F \times E$ ، إذا كان $E \neq F$
3. إذا كان عدد عناصر E هو m وعدد عناصر F هو n فإن عدد عناصر $E \times F$ هو $m.n$

مثال.

اذا كانت $A=\{a, b, c\}$ و $B=\{1, 2\}$ فان $AxB=\{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$

و $BxA=\{ (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c) \}$ و $B^2=BxB=\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

متممة مجموعة جزئية Complementaire d'un sous-ensemble



لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E.

تعريف : نسمي متممة A في E المجموعة التالية

$$C_EA=\{x / x \in E \wedge x \notin A\}=E-A$$

يرمز لمتممة A كذلك بـ: $\bar{A}$.

بعض خواص المتممة

1. $C_E\phi=E$ ، $C_EE=\phi$
2. $C_E(C_EA)=A$
3. $C_E(A\cap B)=C_EB\cup C_EA$ ، $C_E(A\cup B)=C_EB\cap C_EA$

مثال: $E=\mathbb{N}$ و $P=\{0,2,4,6,\dots\}$ مجمزعة الاعداد الزوجية $I=\{1,3,5,\dots\}$ مجمزعة الاعداد الفردية.

P و I يتممان بعضهما البعض.

تجزئة مجموعة Partition d'un ensemble

لتكن E مجموعة كيفية و $\{A_i, i\in I\}$ (حيث I مجموعة أدلة) عائلة أجزاء من E نقول أنها تشكل تجزئة للمجموعة E إذا تحقق ما يلي

1. $E=\bigcup_{i\in I} A_i$
2. الأجزاء متقاطعة مثنى مثنى وهو ما نعبر عنه بـ:

$$A_i\cap A_j=\phi, i\neq j$$

مثال 1.

لتكن المجموعة $E=\{1,2,3\}$.

إن العائلة $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E

إن العائلة $\{\{1\},\{2,3\}\}$ تشكل تجزئة أخرى للمجموعة E

مثال 2. اذا كانت A مجموعة جزئية من مجموعة E فان المجموعة $\{A, \bar{A}\}$ تشكل تجزئة لـ E.

النظرية التالية تعطي لنا بعض خواص المجموعات

نظرية : لتكن A ,B, C اجزاء من E و D,H اجزاء من F اذن لدينا :

$$(1)\ A\cup B=B\cup A\,,A\cap B=B\cap A\,,A\cap\phi=\phi\,,A\cup\phi=A,C_E(C_EA)=A$$

$$(2) A\subset B\Leftrightarrow C_EB\subset C_EA],A\cap C_EA=\phi,A\cup C_EA=E$$

$$(3) C_E\,(A\cup B)=C_EA\cap C_EB\,,C_E\,(A\cap B)=C_EA\cup C_EB$$

$$(4)\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\,,(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

$$(5)\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\,,A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$(6)\ (A\times D)\cap(B\times H)=(A\cap B)\times(D\cap H)$$

البرهان: نكتفي ببرهان (3)، (5) و (6).

3) لنثبت ان $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

x$\in\overline{A\cup B}\Leftrightarrow$ x$\notin A\cup B$

$\Leftrightarrow$ (x$\notin A$ et x$\notin B$)

$\Leftrightarrow$ (x$\in\bar{A}$ et x$\in\bar{B}$)

$\Leftrightarrow$ x$\in\bar{A}\cap\bar{B}$. donc $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

بنفس الطريقة يتم اثبات $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

5)

x∈A∩(BUC) ⇔ [x∈A ∧ x∈ (BUC)] ⇔ x∈A ∧ (x∈ B ∨ x∈C)

و بما ان الوصل توزيعي على الفصل فان:

⇔ [(x∈A ∧ x∈ B) ∨ (x∈A ∧ x∈ B)]

⇔ [x∈ A∩B ∨ x∈ A∩C]

⇔ x∈ (A∩B) U (A∩C)

و هذا يؤدي الى ان: A∩(BUC)= (A∩B) U (A∩C) .

6) نثبت ان $(A\times D)\cap(B\times H)=(A\cap B)\times(D\cap H)$.

(x,y)$\in(A\times D)\cap(B\times H)\Leftrightarrow$ [(x,y)$\in(A\times D)$ et (x,y)$\in(B\times H)$]

$\Leftrightarrow$ (x$\in A$ et y$\in D$ et x$\in B$ et y$\in H$)

$\Leftrightarrow$ (x$\in A$ et x$\in B$ et y$\in D$ et y$\in H$)

$\Leftrightarrow$ (x$\in A\cap B$ et y$\in D\cap H$)

$\Leftrightarrow$ (x,y)$\in(A\cap B)\times(D\cap H)$.

و منه $(A\times D)\cap(B\times H)=(A\cap B)\times(D\cap H)$.

3.2 العلاقات Relations

• العلاقة Relation

تعريف لتكن E و F مجموعتان. نسمي علاقة من E نحو F كل ثلاثية $R=(E,F,\Gamma)$ حيث Γ جزء من الجداء الديكارتي ExF. إذا كان $(x,y)\in\Gamma$ نكتب xRy و تسمى x السابقة و y صورة x.
يسمى Γ ببيان العلاقة R و لدينا $\Gamma=\{(x,y)\in ExF \,/\, xRy\}$.

أمثلة:

1. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$. نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ كالتالي
من أجل $a\in E, b\in F$: $a\mathcal{R}b$ إذا وفقط إذا كان a يقسم b
لدينا: $2\mathcal{R}4$,$2\mathcal{R}6$,$3\mathcal{R}3$,$3\mathcal{R}6$, $3\mathcal{R}9$
بيان العلاقة هو $\Gamma=\{(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (3,9)\}$.

2. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$ نعرف العلاقة $\mathcal{S}$ كالتالي:
من أجل $a\in E, b\in F$: $a\mathcal{S}b$ إذا وفقط إذا كان a أكبر تماما من b
لدينا: $5\mathcal{S}3$,$5\mathcal{S}4$

بيان العلاقة هو $\Gamma=\{(5,3), (5,4)\}$.

3. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$ نعرف العلاقة $\mathcal{T}$ كالتالي:
من أجل $a\in E, b\in F$: $a\mathcal{T}b$ إذا وفقط إذا كان $a+b$ عددا زوجيا
لدينا: $2\mathcal{T}4$,$2\mathcal{T}6$,$3\mathcal{T}3$,$3\mathcal{T}9$, $5\mathcal{T}3$,$5\mathcal{T}9$

بيان العلاقة هو $\Gamma=\{(2,4), (2,6), (3,3), (3,9), (5,3), (5,9)\}$.

ملاحظة: اذا كانت E=F نقول عن العلاق R انها ثنائية.

• خواص علاقة في مجموعة

لتكن $\mathfrak{R}$ علاقة ثنائية في مجموعة E .

- $\mathfrak{R}$ علاقة انعكاسية $\Leftrightarrow$ $\forall x\in E : x\,\mathfrak{R}\,x$
- $\mathfrak{R}$ علاقة تناظرية $\Leftrightarrow$ $(\forall x, y\in E : x\,\mathfrak{R}\,y \Rightarrow y\,\mathfrak{R}\,x)$
- $\mathfrak{R}$ علاقة متعدية $\Leftrightarrow$ $(\forall x, y, z\in E : x\,\mathfrak{R}\,y \wedge y\,\mathfrak{R}\,z \Rightarrow x\,\mathfrak{R}\,z)$

علاقة التكافؤ Relation d'équivalence

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على المجموعة E

تعريف: نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة **تكافؤ** إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية في آن واحد

نسمي صف تكافؤ العنصر $a \in E$ المجموعة الجزئية التالية

$$\overline{a} = \{x \in E : x\mathcal{R}a\}$$

امثلة:

1. نعتبر المجموعة $E = \{1,2,3\}$ و العلاقتين $\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)(1,3),(3,1)\}$

و $\mathcal{R}_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

– في المثال الأول السابق لدينا $\overline{1} = \{1,3\}$, $\overline{2} = \{2\}$, $\overline{3} = \{1,3\}$ بالنسبة للعلاقة $\mathcal{R}_1$ و $\overline{1} = \{1\}$, $\overline{2} = \{2\}$, $\overline{3} = \{3\}$ بالنسبة للعلاقة $\mathcal{R}_2$

(2 $E = \mathbb{R}_+^*$, $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\ln y = y\ln x$

إثبات أن علاقة تكافؤ: $(\mathcal{R}\text{علاقة تكافؤ}) \Leftrightarrow (\mathcal{R}\text{ انعكاسية , تناظرية, متعدية})$

- $(\mathcal{R}\text{ انعكاسية}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}x)$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : x\ln x = x\ln x$ ومنه $x\mathcal{R}x$, ادن $\mathcal{R}$ انعكاسية.

- $(\mathcal{R}\text{ تناظرية}) \Leftrightarrow (\forall x,y \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$

لدينا $x\mathcal{R}y \Rightarrow x\ln y = y\ln x \Rightarrow y\ln x = x\ln y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

و منه $\mathcal{R}$ تناظرية.

- $(\mathcal{R}\text{ متعدية}) \Leftrightarrow (\forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$

لدينا
$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ln y = y\ln x \\ \wedge \\ y\ln z = z\ln y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\ln y}{y} = \frac{\ln x}{x} \\ \wedge \\ \frac{\ln z}{z} = \frac{\ln y}{y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\ln z}{z} = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow x\ln z = z\ln x \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

ومنه $\mathcal{R}$ متعدية مما سبق نجد أن $\mathcal{R}$علاقة تكافؤ.

تسمى مجموعة كل أصناف التكافؤ وفق العلاقة R بمجموعة حاصل قسمة E على R يرمز لها (E/R)

علاقة الترتيب Relation d'ordre

تعريف : نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة **ترتيب** إذا كانت انعكاسية وضد تناظرية ومتعدية في آن واحد

تعريف: نقول أن الترتيب **كلي** إذا كان كل عنصرين من E **قابلين للمقارنة** وفق العلاقة $\mathcal{R}$ أي إما

$a\mathcal{R}b$, و إما $b\mathcal{R}a$

ملاحظة: نقول عن الترتيب انه ترتيب جزئي ادا لم يكن ترتيبا كليا

مثال:

1- العلاقة R المعرفة على IR بـ: $x , y \in IR : xRy \Leftrightarrow x \leq y$
علاقة ترتيب **كلي** لان من اجل أي x و y من IR فاما $x \leq y$ او $y \leq x$.

2- العلاقة R المعرفة على IN بـ: $x , y \in IN : xRy \Leftrightarrow$ x يقسم y
علاقة ترتيب **جزئي** لانه من اجل x=2 و y =3 من IN فان 2 لايقسم 3 و 3 لايقسم 2.

4.2 التطبيقات Appliations

- **التطبيق**

ليكن E و F مجموعتين.

تعريف : نسمي تطبيقا من E نحو F كلّ علاقة تسمح بأن نرفق بكلّ عنصر من E عنصرًا وحيدًا من F.

ونرمز للتطبيق بــ :

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

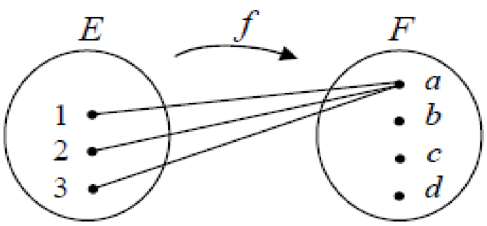
ترميز : تسمى E مجموعة المنطلق (أو البدء).

تسمى F مجموعة الوصول.

x تسمى سابقة و $y = f(x)$ تسمى صورة العنصر x.

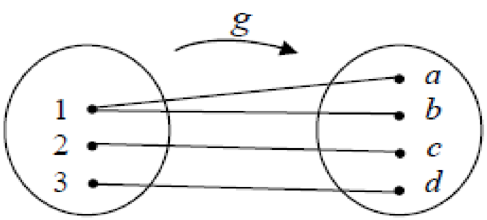
أمثلة :

(1)



f تطبيق

(2)



g ليس تطبيقا

- **خواص التطبيقات**

التطبيق المتباين Application Injective

ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقا.

تعريف : نقول أن f متباين إذا حقّق :

$$x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

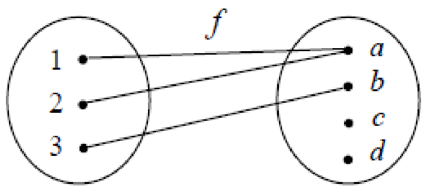
باستعمال عكس النقيض هذا يكافئ:

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

أمثلة.

(1

(1)



f ليس متباينًا

(2 $f : IN \rightarrow IN^*$ متباين لان:

$n \rightarrow f(n)= n+1$

$\forall n, m \in IN : f(n)=f(m) \Leftrightarrow n+1=m+1 \Leftrightarrow n=m$

التطبيق الغامر Application Surjective

ليكن $F \longrightarrow E: f$ تطبيقا.

نقول أن f غامر إذا حقق :

$$\forall y \in F , \exists x \in E : f(x)=y$$

وهو ما يكافئ :

من أجل كل y من F، المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلاً على الأقل.

أمثلة

1) التطبيق في المثال 1) السابق غير غامر لان c مثلا ليس له سابقة و بالتالي غير تقابلي

2) التطبيق في المثال 2) السابق **غامر** لان:

$\forall m \in IN^* : \exists n \in IN / m= f(n)?$

المعادلة $m= f(n)$ تقبل حلا على الأقل. بالفعل لدينا : $m= f(n) \Leftrightarrow m=n+1 \Leftrightarrow n=m-1 \in \mathbb{N}$

$n=m-1 \in \mathbb{N}$ لان $m \geq 1$.

التطبيق التقابلي Application Bijective

ليكن $F \longrightarrow E: f$ تطبيقا.

نقول أن f تقابل إذا كان متباينا وغامرًا. وهو ما يكافئ أن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلاً <u>وحيدًا</u> من أجل كل $y \ni F$.

أمثلة.

1) التطبيق في المثال 1) السابق غير تقابلي

2) التطبيق $f : IN \rightarrow IN^*$ تقابل لانه متباين و غامر.

$n \rightarrow f(n)= n+1$

3) $f : IR \rightarrow IR$ غير متباين لان:

$x \rightarrow f(x)=x^2$

$\exists x_1=-1, x_2=1 \in IR : x_1 \neq x_2$ et $f(x_1)= f(x_2)=1$

و **غير غامر** لان $y=-1$ ليس له سابقة. فهو بالتالي تطبيق غير تقابلي.

تساوي تطبيقين: Egalité de deux applications

ليكن $f : E \to F$ و $g : G \to H$ تطبيقين. يكون f **مساويا** لـ g و نكتب f=g اذا كان:

$$1/\ F=H \text{ و } E=G$$

$$2/\ \forall x\in E : f(x)=g(x)$$

التطبيق المطابق: Application identique

لتكن E مجموعة. التطبيق المطابق على E هو التطبيق الذي يرمز له I_E المعرف بـ:

$I_E : E \to E$. من اجل كل $x\in E$: $I_E(x)=x$

تركيب تطبيقين: Composition de deux applications

ليكن $f : E \to F$ و $g : F \to G$ تطبيقين. نسمي تركيب التطبيقين f و g التطبيق

$gof: E \to G$ المعرف بـ: $\forall x\in E : (gof)(x)=g[f(x)]$

$$f: [0\ \ 1] \to [0\ \ 2] \qquad g : [0\ \ 2] \to [0\ \ 1]$$

$$y \to x=f(y)= 2-x \qquad y \to x=g(x)=(x-1)^2$$

$gof : [0\ 1] \to [0\ 2]$

$(gof)(x)=g[f(x)]=(2-x-1)^2= (1-x)^2 = x^2-2x+1.$

$fog : [0\ 2] \to [0\ 1]$

$(fog)(x)=f[g(x)]=2-g(x)=2-(x-1)^2=-x^2+2x+1.$

اذن بشكل عام فان: $gof \neq fog$.

التطبيق العكسي لتطبيق تقابلي Application réciproque d'une application bijective

اذا كان $f : E \to F$ تطبيقا تقابليا. نسمي تطبيقا عكسيا لـ f (Application réciproque) التطبيق الذي يرمز له بـ: f^{-1} و المعرف من F نحو E حيث:

$$\forall x\in E, \forall y\in F : y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \qquad f^{-1} : F \to E$$

$$y \to x=f^{-1}(y)$$

تمرين: نعتبر التطبيق f المعرف بـ:

$$f : F \to E$$

$$x \to y=f(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

- هل f متباين؟ هل هو غامر؟ هل هو تقابل؟
- حدد مجموعة الوصول حتى يكون تقابلي. و عين تطبيقه العكسي f^{-1} .

التباين:

$\forall x_1, x_2 \in IR-\{2\}$:

$f(x_1)= f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-2} = \frac{x_2+1}{x_2-2} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-2)=(x_1-2)(x_2+1)$

$\Leftrightarrow 3x_1=3x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

اذن f متباين.

الغمر:

$\forall y \in IR, \exists ?\, x \in IR-\{2\} : y=f(x).$

أي هل المعادلة $y=f(x)$ ذات المجهول x تملك حلا أي هل x موجود

$$f(x)=y \longleftrightarrow \frac{x+1}{x-2}=y$$
$$\longleftrightarrow x+1=xy-2y$$
$$\longleftrightarrow xy-x=2y+1$$
$$\longleftrightarrow x(y-1)=2y+1$$

- من اجل $y=1$ المعادلة الأخيرة تصبح : $0=3 \Leftrightarrow x.0=3$ و هذا مستحيل أي x غير موجود او بتعبير اخر $y=1$ ليست له سابقة و بالتالي f تطبيق غير غامر.

حتى يكون f غامرا و بالتالي تقابليا يجب ان تكون مجموعة الوصول F=IR-{1}

ويكون لدينا: من اجل $y\neq 1$ فان:

$y=f(x) \Leftrightarrow x(y-1)= 2y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1} \in E=IR-\{2\}$?

لاثبات ان $x \in E=IR-\{2\}$ نفرض $x \notin E$ أي $x=2$ نجد $2=\frac{2y+1}{y-1}$ و بالتالي $2y-2=2y+1$ أي $-2=1$ تناقض

ومنه $x\in E$.

اذن $f : IR-\{2\} \to IR-\{1\}$ تطبيق تقابلي

$x \to y=f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

وتطبيقه العكسي

$f^{-1} : IR-\{1\} \to IR-\{2\}$

$y \to x=f^{-1}(y)=\frac{2y+1}{y-1}$

و يمكن كتابة كذلك:

$f^{-1} : IR-\{1\} \to IR-\{2\}$

$x \to y=f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

L'image directe d'un sous ensemble par une application الصورة المباشرة لمجموعة بتطبيق

ليكن $F \longrightarrow E: f$ تطبيقا ولتكن $A \subset E$.

تسمى الصورة المباشرة للجزء A وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من F والمعرفة بـــ :

$$f(A)=\{f(x)/x \in A\}$$
$$=\{y \in F / \exists x \in A : y=f(x)\}$$

بعض خواص الصورة المباشرة لمجموعة

لتكن A_1, A_2 مجموعتان جزئيتان من E .

أ. $f(\phi)=\phi$.

ب. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

ج. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

مثال: نعتبر التطبيق f المعرف بـ : $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

نضع $A=\left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ أحسب $f(A)$. هل التطبيق f متباين؟

$f(A)=\{f(0), f(\frac{1}{2}), f(1), f(2)\}=\{0, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\}$ car $f(\frac{1}{2})=f(2)=\frac{2}{5}$.

ومنه f غير متباين.

الصورة العكسية لمجموعة بتطبيق L'image réciproque d'un sous ensemble par une application

ليكن $f: E \longrightarrow F$ تطبيقا

نسمي الصورة العكسية للجزء $F \supset B$ وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من E والمعرفة بـــ :

$$f^{-1}(B)=\{x \in E / f(x) \in B\}$$

بعض خواص الصورة العكسية لمجموعة

لتكن B_1, B_2 مجموعتان جزئيتان من F .

1. $f^{-1}(\phi)=\phi$

2. $f^{-1}(F)=E$

3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2)=f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2)=f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

مثال: نعتبر المثال السابق $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

عين قيم y من IR التي لها سوابق. أي عين قيم y التي من اجلها المعادلة $y=f(x)$ لديها حلولا.

$$y=\frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow yx^2-x+y=0$$

- لما $y=0$ فان $x=0$
- لما $y\neq 0$ فالمعادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=1-4y^2$ اذن $\Delta>0$ من اجل قيم $y\in[-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]-\{0\}$.
- اذن قيم y التي لها سوابق هي المجال: $[-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]$

اذن f غيرغامر (لان من اجل y=1 المعادلة تصبح: $x^2-x+1=0$ ليست لها حلا).