Département de Mathématiques — Université de Jijel
$2^{ème}$ *ANNÉE LICENCE* — 2025 – 2026

TD n°1

Exercice 1 Définir les termes mathématiques suivants: Corollaire, Définition, Proposition et Propriété.

Exercice 2 Corriger les phrases suivantes:

1. $x^2 + 3x + 2 = 0$ possède deux solutions.
2. Comme $x^2 - 1 = 0$, $x = -1$ ou $x = 1$
3. Aucun ensemble X ne possède de cardinal négatif.
4. Je vais démontrer que...
5. Comme x divise y, on obtient: $y = az$.
6. Soit U le corps des nombres réels.
7. La fonction $x \rightarrow e^{x+1}$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. Supposons que $a \in X$. X est un espace compact...
9. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, le produit de a et b est un entier relatif.

Exercice 3 Voici un problème de théorie des nombres et une solution à ce problème.

Problème: Combien y a-t-il de nombres premiers p tels que $p^2 + 1$ est également un nombre premier ?

On propose la solution suivante:

"Si p est impair, alors p^2 est aussi impair et $p^2 + 1$ est donc pair. Donc $p^2 + 1$ n'est pas premier (car $p \neq 1$). Donc p est pair. Donc $p = 2$ car p est premier."

1. Trouver les fautes de rédaction dans cette solution.
2. Donner une bonne rédaction.

Exercice 4 On demande de démontrer

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + (-1)^n(2n - 1)$ est un multiple de 4. (Séparasion des cas)
2. Soit n un nombre entier positif ou nul et considérons le polynome $P(n) = n^2 + 7n + 12$. Alors il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{P(n)} \in \mathbb{N}$. (Raisonnement direct)
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$
$$xy \neq 1 \text{ et } x \neq y \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}.$$
(Contraposition)
4.
   - Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2}$, alors $a = b = 0$.

- En déduire que si m, n, p et q sont des entiers relatifs, alors

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Leftrightarrow (m = p \text{ et } n = q)$$

  (Par l'absurde)
- La somme d'un nombre rationnel et un nombre irrationnel est irrationnelle.
- La racine carrée d'un nombre irrationnel positif est irrationnelle.
- La somme de deux nombres irrationnels positifs est irrationnelle. (Montrer par un contre exemple que cette affirmation est fausse).

Exercice 5 Démontrer par récurrence:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}_+^*$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$$

   (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Exercice 6 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k. \end{cases}$$

Démontrer par récurrence forte que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 7 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}. \end{cases}$$

En utilisant le principe du bon ordre montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.

$\mathcal{N} - \mathcal{F}etouci$