Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'informatique
Année universitaire : 2025-2026

Module : Analyse 1
Licence 1, informatique

Série de TD n° 2 : Les nombres complexes

Exercice 1 : On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire z_3 sous forme algébrique.
2. Écrire z_3 sous forme trigonométrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 2 : Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2 + 2i)^6$
2. $z_2 = \left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$
3. $z_3 = \dfrac{(1 + i)^{2000}}{(i - \sqrt{3})^{1000}}$.

Exercice 3 : Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Utiliser la formule d'Euler pour démontrer que $\dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel, et préciser son module.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1. $z^2 = \overline{z}$.
2. $z^2 + (i - 2)z - 2i = 0$, puis l'équation $Z^4 + (i - 2)Z^2 - 2i = 0$ (la deuxième partie de la question est lassée aux étudiants).

Exercice 5 : Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 = 0. \tag{1}$$

1. Vérifier que $z = 0$ n'est pas solution puis en déduire que (1) devient $z^2 + \frac{1}{z^2} - 2(z + \frac{1}{z}) + 3 = 0$.
2. En posant $Z = z + \frac{1}{z}$ transformer l'équation (1) en une équation de second degré en Z.
3. En déduire les solutions de l'équation (1).

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1. Claculer les racines $n-$ième de l'unité (c. à. d. de 1)
2. Montrer que la somme de ces racines est égale à 0.

Exercice 7 :(laissé aux étudiants) Calculer les racins 5-ièmes de $3 - 3i$.