Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département d'informatique

Année universitaire 2025-2026

Analyse 1

par
Yasmina Daikh

Chapitre 3

Suites numériques

Les suites numériques constituent un concept fondamental en mathématiques, particulièrement important en informatique pour l'analyse d'algorithmes, la modélisation de processus itératifs et l'étude de la convergence des méthodes numériques. Une suite représente une succession ordonnée de nombres réels, offrant un cadre formel pour étudier les processus évolutifs discrets.

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1.1. — *Une suite numérique est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui à tout entier naturel n associe un réel noté u_n.*

— *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ième terme ou terme général de la suite.*

— *On note la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).*

Remarques.

- *Il arrive que l'on considère des suites définies à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.*
- *Une suite peut être définie :*
  - — *explicitement : $u_n = f(n)$ où f est une fonction de n.*
  - — *par récurrence : lorsque chaque terme s'exprime en fonction du ou des termes précédents, par exemple $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 donné.*

Exemples.

- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme générale $u_n = 5$ (une suite constante).*
- *Suite arithmétique de raison 2 : $u_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$,*
- *Suite géométrique de raison 2 :*

$$u_n = 3 \times 2^n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

- *Suite alternée : $u_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$,*
- *Suite harmonique : $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$*

sont des suites explicites.

- *Suite arithmético-géométrique*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est une suite définie par récurrence.

3.2 Suites bornées

Définition 3.2.1. *Une suite (u_n) est dite :*

— *Majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$*

— *Minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$*

— *Bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est à dire : $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq\ u_n \leq M$.*

Exemples.

1. *La suite alternée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée car*

$$-1 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. *$u_n = n^2$ est minorée mais non majorée.*

Proposition 3.2.1. *(u_n) est bornée si et seulement si $\exists K > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq K$*

Démonstration.
($\Rightarrow$) Si (u_n) est bornée, alors $\exists m, M$ tels que $m \leq u_n \leq M$. Soit $K = \max(|m|, |M|)$, alors $|u_n| \leq K$.
($\Leftarrow$) Si $|u_n| \leq K$, alors $-K \leq u_n \leq K$, donc (u_n) est bornée. □

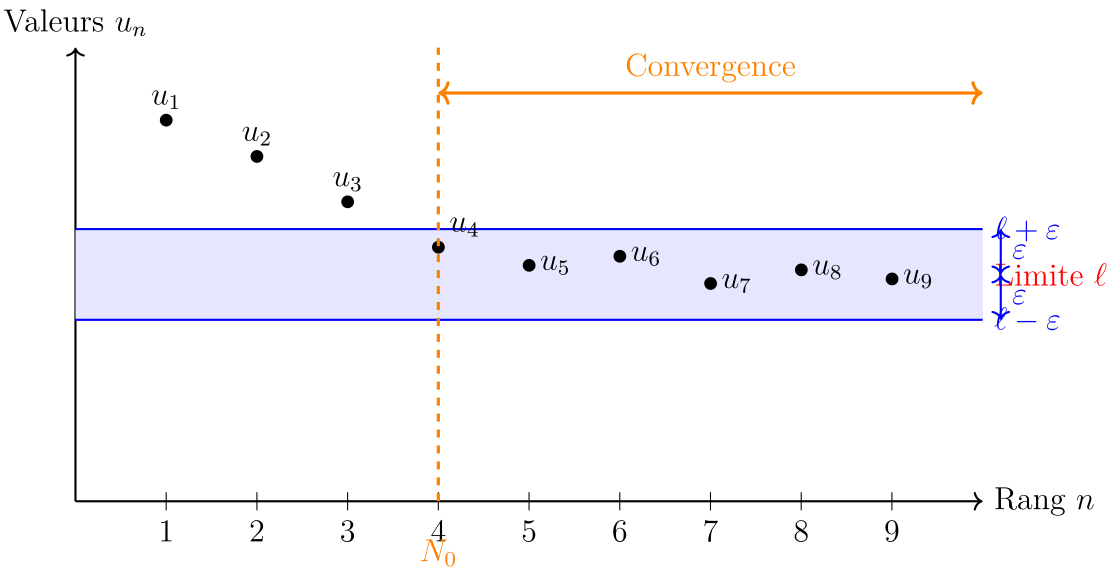
3.3 Suites convergentes

Définition 3.3.1. *(définition mathématique de la limite) Une suite (u_n) converge vers un réel ℓ ssi :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geq N_0 \Longrightarrow\ |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$.

Remarque. *L'inégalité $|u_n - \ell| < \varepsilon$ est équivalente à $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.*



Définition 3.3.2. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon, c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite.*

Exemples.

1. *Montrons que $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.*
   Soit $\varepsilon > 0$. On cherche N_0 tel que pour $n \geq N_0$, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.
   Or
   $$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$
   Donc en prenant $N_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, on a le résultat souhaité.
2. *Montrons que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$.*
   Soit $\varepsilon > 0$. $\exists ? N_0$ tel que pour $n \geq N_0, |u_n - 2| < \varepsilon$.
   Or
   $$|u_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n+1-2n-6}{n+3}\right| = \frac{5}{n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 3.$$
   Donc en prenant $N_0 = |[\frac{5}{\varepsilon} - 3]| + 1$, on a le résultat souhaité.
3. *La suite alternée de terme général $(-1)^n$ est divergente. En effet, supposons par l'absurde que la suite converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.*
   Par définition de la convergence, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$:
   $$|(-1)^n - \ell| < \varepsilon$$
   Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$:
   $$|(-1)^n - \ell| < \frac{1}{2}.$$
   Considérons maintenant deux indices pairs et impairs supérieurs à N_0 :
   - *Pour $n = 2k \geq N_0$ (pair) : $(-1)^{2k} = 1$, donc $|1 - \ell| < \frac{1}{2}$,*
   - *Pour $n = 2k+1 \geq N_0$ (impair) : $(-1)^{2k+1} = -1$, donc $|-1-\ell| < \frac{1}{2}$.*

Nous avons donc simultanément :

$$|1-\ell| < \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad |-1-\ell| < \frac{1}{2}.$$

Ce qui implique :

$$\ell \in]1-\tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{1}{2}[=]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[$$

et

$$\ell \in]-1-\tfrac{1}{2}, -1+\tfrac{1}{2}[=]-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}[.$$

Or les intervalles $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ *et* $]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ *sont disjoints. Cette contradiction montre que notre hypothèse de convergence est fausse.*
La suite $(-1)^n$ *ne converge donc pas.*

Théorème 3.3.3. *(unicité de la limite) Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$*, alors* $\ell = \ell'$*.*

Démonstration. Démontrons par l'absurde. Supposons $\ell \neq \ell'$. Soit $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3} > 0$.
Il existe N_1 tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Il existe N_2 tel que

$$\forall n \geq N_2, |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a :

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|.$$

Contradiction. Donc $\ell = \ell'$. □

3.4 Propriétés des suites convergentes

La preuve des résultats de la proposition suivante découlent directement de la Définition 3.3.1

Proposition 3.4.1.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0,$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|.$

Théorème 3.4.1. *(passage à la limite dans les inégalités) Si* $u_n \to \ell$*,* $v_n \to \ell'$ *et* $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang, alors* $\ell \leq \ell'$*.*

Théorème 3.4.2. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $\lim u_n = \ell$. Pour $\varepsilon = 1$, $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| < 1$.
Donc

$$\forall n \geq N, |u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

Soit $M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|)$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

□

Remarque. *La réciproque est fausse, c. à. d. suite bornée $\not\Rightarrow$ suite convergente.*
Contre-exemple : *La suite $u_n = (-1)^n$ est une suite bornée car $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = 1 \leq 1$, mais elle n'est pas convergente (voir exemple 3 de la définition 3.3.2).*

Théorème 3.4.3. *(théorème des gendarmes) Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N_1$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n$
$\exists N_2$ tel que $\forall n \geq N_2$, $|w_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow w_n < \ell + \varepsilon$.
Soit N_3 à partir duquel $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors pour $n \geq \max(N_1, N_2, N_3)$, on a :

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon.$$

□

Exemple. $v_n = \dfrac{\sin n}{n} \to 0$ *car* $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ *et* $\pm\dfrac{1}{n} \to 0$.

3.5 Opérations arithmétiques sur les suites convergentes

Théorème 3.5.1. *Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, alors :*

1. ***Somme*** *: $u_n + v_n \to \ell + \ell'$.*
2. ***Produit*** *: $u_n \times v_n \to \ell \times \ell'$.*
3. ***Quotient*** *: Si $\ell' \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n et $\dfrac{u_n}{v_n} \to \dfrac{\ell}{\ell'}$.*
4. ***Multiplication par scalaire*** *: $\lambda u_n \to \lambda \ell$ $(\lambda \in \mathbb{R})$*

Démonstration. Nous faisons la preuve pour la somme. Soit $\varepsilon > 0$,
$\exists N_1$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$\exists N_2$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Exemple. *: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = \dfrac{2n^2 + 3n + 1}{n^2 - n + 2}$.*

On écrit : $u_n = \dfrac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} \to \dfrac{2}{1} = 2$.

3.6 Extensions aux limites infinies

Définition 3.6.1.

- $\lim_{n\to+\infty} u_n \to +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ (n \geq N_0 \Longrightarrow u_n > A).$
- $\lim_{n\to+\infty} u_n \to -\infty \iff \forall A > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ (n \geq N_0 \Longrightarrow u_n < -A).$

Exemple. *Utilisant la définition mathématique de la limite, montrer que* $u_n = n^2 \to +\infty$.
Soit $A > 0$. *On cherche* $N_0 \in \mathbb{N}$, *tel que pour* $n \geq N_0, u_n > A$.
Or

$$u_n > A \iff n^2 > A \iff n > \sqrt{A}.$$

Donc en prenant $N_0 = [\sqrt{A}] + 1$, *on a le résultat souhaité.*

- **Règles de calcul :**
  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to L > 0$, alors $u_n \times v_n \to +\infty$
- **Formes indéterminées** : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, $\frac{0}{0}$.

Exemple. *Soit* (u_n) *telle que* $u_n = n - \sqrt{n^2+1}$. *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty - \infty (\textit{forme indéterminée}).$$

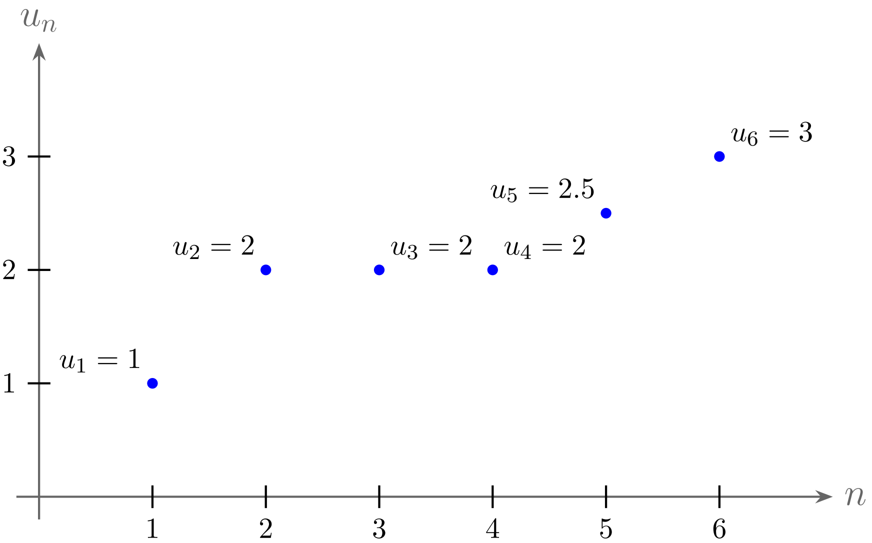
On multiplie et on divise par la quantité conjuguée :

$$u_n = \frac{(n - \sqrt{n^2+1})(n + \sqrt{n^2+1})}{n + \sqrt{n^2+1}} = \frac{-1}{n + \sqrt{n^2+1}} \to 0.$$

3.7 Suites monotones

Définition 3.7.1. *Une suite* (u_n) *est :*

— *Croissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
— *Décroissante si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
— *Monotone si elle est croissante ou décroissante.*
— *Strictement monotone si les inégalités sont strictes.*



Suite croissante mais non strictement croissante
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$ (croissante)
- $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$ (non strictement croissante)

exemple : $u_2 = u_3 = u_4 = 2$

Remarque. *Si (u_n) est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,\ \forall n.$

Exemples.

1. *La suite (u_n) définie par :*

$$u_n = 5 - 2n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

est strictement décroissante car :

$$u_{n+1} - u_n = (5 - 2(n+1)) - (5 - 2n) = -2 < 0$$

Donc $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. *Soit $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour $n \geq 1$.*
On peut étudier le quotient car les termes de la suites sont strictement positifs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n}.$$

Pour $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} < 1 \quad \textit{car} \quad n+1 < 2n$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} < u_n,$$

*d'où la suite (u_n) est **strictement décroissante**.*

Théorème 3.7.2. *(Convergence des suites monotones)*

— *Toute suite croissante et majorée converge vers* $\sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
— *Toute suite décroissante et minorée converge vers* $\inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante et majorée et $M = \sup\{u_n\}$.
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $u_N > M - \varepsilon$ (par définition de la borne supérieure).
Comme (u_n) est croissante, $\forall n \geq N$, $u_n \geq u_N > M - \varepsilon$.
Et par définition de M, $u_n \leq M < M + \varepsilon$.
Donc $\forall n \geq N$, $|u_n - M| < \varepsilon$. □

Exemple. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ *est croissante et majorée par* 1*, donc convergente. Elle converge vers* 1 *donc* $\sup(u_n) = 1$.

3.8 Suites extraites (sous-suites)

Définition 3.8.1. *Une suite* (v_n) *est extraite de* (u_n) *s'il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que* $v_n = u_{\varphi(n)}$

Exemple. *Pour* $u_n = (-1)^n$*, on peut extraire :*

— *Les termes pairs :* $v_n = u_{2n} = 1$
— *Les termes impairs :* $w_n = u_{2n+1} = -1$

Théorème 3.8.2. *Si* $u_n \to \ell$*, alors toute suite extraite converge vers la même limite* ℓ.

Théorème 3.8.3. *(Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Exemple. $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ *est bornée mais divergente. En effet, on peut extraire :*

$v_n = u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1$

$w_n = u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \to -1$

et d'après le Théorème 3.8.2, la suite $(u_n)_n$ *est divergente, car deux de ses sous-suites convrgent vers deux limites distinctes.*

3.9 Suites récurrentes

Définition 3.9.1. *Une suite récurrente définie par une fonction est une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par la donnée de :*

— *Un (ou plusieurs) terme(s) initial(aux)*
— *Une relation* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \geq 0$

où f *est une fonction définie sur une partie de* $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. ***Suite arithmétique :*** $u_{n+1} = u_n + r, u_0 = 2$.
2. ***Suite géométrique :*** $u_{n+1} = q \cdot u_n, u_0 = -1$.
3. ***Suite logistique :*** $u_{n+1} = ru_n(1 - u_n), u_0 = \frac{1}{2}$.

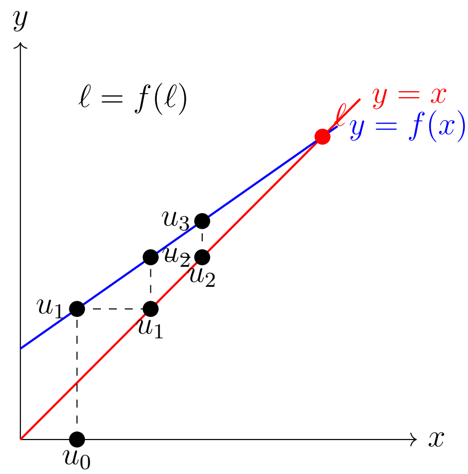
Définition 3.9.2. *Un réel* ℓ *est un point fixe de* f *si* $f(\ell) = \ell$.

Définition 3.9.3. *Un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est stable par f si $f(I) \subseteq I$.*

Proposition 3.9.1. *Soit (u_n) une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Si I est stable par f et si $u_0 \in I$, alors $u_n \in I$ pour tout n.*

Proposition 3.9.2. *Soient f une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs dans I. Soit (u_n) une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$. Si (u_n) converge vers le réel $\ell \in I$, alors ℓ est un point fixe de f.*

Démonstration. Par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$. □



Théorème 3.9.4. *(théorème de convergence) Soit $f : I \to I$ continue et croissante. Alors :*

1. *La suite (u_n) est monotone. Plus précisément :*
   - *Si $u_1 \geq u_0$, alors (u_n) est croissante*
   - *Si $u_1 \leq u_0$, alors (u_n) est décroissante*
2. *Si de plus I est fermé borné ($I = [a, b]$), alors (u_n) converge vers un point fixe de f dans $[a, b]$ i.e. vers $\ell \in [a, b]$ vérifiant $\ell = f(\ell)$.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence en utilisant la croissance de f. □

Exemple. *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x + 3}$.*

1. *Étudier les variations de f sur $[-2, +\infty[$.*
2. *Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante, minorée par -1 et majorée par 6.*
3. *Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ, puis déterminer ℓ.*

Solution :

1. *La fonction f est dérivable sur $[-2, +\infty[$ et sur cet intervalle, on a :*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 3}}$$

   Ainsi, $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $[-2, +\infty[$.

2. *Pour $n \geq 0$, on note $P(n)$ la propriété suivante :*

$$" - 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6"$$

On va prouver par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.
***Initialisation :** On a $u_0 = -1$ et $u_1 = 4$ donc :*

$$-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6$$

$P(0)$ est vraie.
***Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie ; on va prouver que $P(n+1)$ est vraie. On sait que :*

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$$

Puisque la fonction f est croissante sur l'intervalle $[-2, 6]$, on en déduit que :

$$f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(6)$$

Ceci donne encore :

$$2\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$$

Puisque $-1 \leq 2\sqrt{2}$, la propriété est vraie au rang $n+1$.
Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

3. *La suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Elle converge donc vers un réel ℓ. Remarquons que l'on sait déjà que $\ell \in [-1, 6]$ (Théorème 3.9.4). De plus, puisque f est continue sur $[-1, 6]$, ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$, soit :*

$$2\sqrt{\ell + 3} = \ell$$

Mettant au carré, ceci implique que ℓ est solution de :

$$4(\ell + 3) = \ell^2$$

Donc :

$$\ell^2 - 4\ell - 12 = 0$$

Les solutions sont $\ell = -2$ et $\ell = 6$.
Puisque l'on savait déjà que $\ell \in [-1, 6]$, on en déduit que $\ell = 6$: la suite (u_n) converge vers 6.

3.10 Suites de Cauchy

Définition 3.10.1. *Une suite (u_n) est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq N,\ |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Théorème 3.10.2. *Dans $\mathbb{R}$, une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Remarque. *Avec les suites de Cauchy, on peut **démontrer la convergence** sans avoir besoin de connaître ou de calculer explicitement la limite.*

Exemple. *Soit la suite (u_n) définie par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Montrons que (u_n) est une suite de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On considère $p > q \geq N$.

$$|u_p - u_q| = \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k^2}$$

Pour $k \geq q+1$, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Donc :

$$|u_p - u_q| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

Par télescopage :

$$\sum_{k=q+1}^{p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \leq \frac{1}{q}$$

Ainsi :

$$|u_p - u_q| \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{N}$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on choisit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors pour tout $p > q \geq N$:

$$|u_p - u_q| < \varepsilon$$

La suite (u_n) est donc de Cauchy, et par le Théorème 3.10.2, elle converge.
La suite (u_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ (problème de Bâle), mais la preuve de Cauchy nous permet d'établir la convergence sans connaître cette limite.

Références

1. **Exo7**, *Cours et exercices de mathématiques*, [En ligne]. "Les suites". Disponible sur : http ://exo7.emath.fr/cours/ch_suites.pdf.
2. **R. Costantini**, *Analyse pour débutants*, Dunod.
3. **J.-M. Monier**, *Analyse MPSI*, Dunod.