Université de Jijel
Département de Mathématiques
Master 1 Analyse Fonctionnelle
Module : Analyse fonctionnelle

Série de TD N°1

2025-2026

Exercice 1 :

Soit (E, τ) un e.v.t. Montrer que

1. pour tout $a \in E$, la translation $T_a : x \mapsto a + x$ est un homéomorphisme de E ;
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'homothétie $M_\lambda : x \mapsto \lambda x$ est un homéomorphisme de E ;
3. l'application $(x, y) \mapsto x - y$ est continue de $E \times E$ dans E.

Exercice 2 :

Soit A un sous ensemble d'un espace vectoriel topologique (E, τ). Montrer que

1. $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(0)} (A + V) = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} (A + V)$ où $\mathcal{B}$ est une base locale de E ;
2. si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe ;
3. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$ et si $\lambda \neq 0$, $int(\lambda A) = \lambda int(A)$;
4. si A est équilibré, alors $\overline{A}$ est équilibré. Si de plus, on a $0 \in int(A)$, alors $int(A)$ est équilibré.

Exercice 3 :

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique (E, τ). Montrer que

1. l'espace vectoriel F muni de la topologie induite par E est un espace vectoriel topologique ;
2. l'adhérence $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
3. si $F \neq E$, alors on a $int(F) = \emptyset$.

Exercice 4 :

Soient (E, τ) un espace vectoriel topologique, K un compact de E et F un fermé de E. Montrer que si l'on a $K \cap F = \emptyset$, alors il existe un voisinage équilibré V de 0 dans E tel que $(K + V) \cap (F + V) = \emptyset$.

Exercice 5 :

Soient (E, τ) un espace vectoriel topologique et B un sous-ensemble de E.
Montrer que B est borné si et seulement si, pour tout voisinage V de 0_E, il existe un réel $s > 0$ tel que $B \subset tV$ pour tout $t \geq s$.

Exercice 6 :

Soient (E, τ) un espace vectoriel topologique et A, B deux sous ensembles de E. Montrer que l'on a les propriétés suivantes :

1. Si A et B sont bornés, alors $A + B$ est borné.
2. Si A et B sont compacts, alors $A + B$ est un compact de E.
3. Si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est un fermé de E.