

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université de Jijel  
Faculté des Sciences et de la Technologie



Département de Génie Civil et Hydraulique

## POLYCOPIÉ DE COURS

Intitulé

### ***ÉCOULEMENTS EN CHARGE***

*Dispensé à l'intention des étudiants de Master en Hydraulique*

**Dr Lyes AMARA**

*Maître de Conférences « A »*

*Septembre 2020*

«...Le mal n'atteint point seulement les livres et les cours destinés aux futurs Ingénieurs. Il a pénétré partout, propagé par les méprises et les préjugés de la foule, qui confond la science et l'industrie ; qui voyant passer la voiture automobile poussiéreuse, haletante et puante, la prend pour le char triomphal de la pensée humaine. L'enseignement supérieur est déjà contaminé par l'utilitarisme.... ».

« ....Aux utilitaires qui croient faire des hommes pratiques en n'enseignant que des choses concrètes, nous annoncerons que leurs élèves seront tout au plus des manœuvres routiniers, appliquant machinalement des recettes incomprises ; car, seuls, les principes abstraits et généraux peuvent guider l'esprit en des régions inconnues et lui suggérer la solution des difficultés imprévues... ».

Extraits du livre : *La théorie physique, son objet et sa structure*, 1906.

Pierres Duhem  
(Professeur de Physique théorique)

## VANT-PROPOS

Ce cours est destiné à l'intention des étudiants de première année du cycle Master de la filière Hydraulique (option : hydraulique urbaine).

Son objectif transparaît clairement dans le titre dans le sens où il porte sur les écoulements forcés, volet très important à côté des écoulements à ciel ouvert et ceux souterrains, dans le socle de formation des hydrauliciens.

Dans les niveaux précédents du cycle Licence, le cours d'Hydraulique générale couvrait une partie du sujet en vue, cependant de manière quelque peu succincte et superficielle, car ne constituait pas un but en soi. Ainsi, pour pousser les connaissances de l'étudiant et l'entraîner à l'exercice du sujet, ce cours se veut plus approfondi dans le traitement des problèmes tout en tâchant à rester pragmatique dans l'exposé sans étoffe inutile quant à la présentation des concepts.

Le cours traite, conformément au programme pédagogique, trois (03) chapitres enchaînés dans l'ordre suivant :

- Chapitre premier : Rappels d'hydrodynamique ;
- Chapitre second : Ecoulements permanents dans les conduites en charge ;
- Chapitre troisième : Régimes transitoires en charge.

Si le premier passe en survol les bases de l'hydrodynamique, acquises déjà, le second quant à lui traite du calcul des conduites en régime permanent. En fin, le dernier chapitre, le plus exigeant en matière d'outillage mathématique, touche au pinacle des écoulements forcés qui est le régime transitoire. Si ce sujet est aussi important c'est en raison des dégâts pouvant atteindre les installations en charge (parfois des vies humaines) et il apparaît sous l'habit du *coup de bélier*, phénomène bien connu des praticiens. Pour ce, un soin particulier est accordé à ce chapitre dans la présentation du régime transitoire et les dispositifs de protection contre ses effets néfastes.

Nous sommes persuadés que nombre de questions méritaient d'être traité ici, mais nous nous sommes contenté d'être conformiste au programme d'enseignement et aussi avons préféré laisser plutôt l'étudiant cheminer seul dans sa voie de quête, ce qui d'ailleurs l'aiguïsera mieux. La liste des références en fin du cours l'aidera à se retrouver dans les dédales de ses questionnements. Ceci s'incarne dans notre conviction dans laquelle l'objectif principal de la formation est l'affûtage de l'esprit de l'étudiant au « *savoir réfléchir* » de manière propre et pourquoi pas élégante même ! Seule cette philosophie permet à l'apprenant d'être guidé à la solution sans embûche et anicroche dans le raisonnement. N'est-ce d'ailleurs pas la qualité que l'on requiert d'un bon ingénieur ?

## **TABLE DES MATIÈRES**

### Avant-propos

### **Chapitre 1 : Rappels d'hydrodynamique**

1.1.	Définition .....	1
1.2.	Équations fondamentales du mouvement .....	2
1.3.	Régimes d'écoulement .....	2
1.4.	Théorème de Bernoulli et conservation de l'énergie .....	4
1.5.	Résistance hydraulique et estimation des pertes de charge .....	5
1.6.	Résistance hydraulique dans les profils non-circulaires .....	9
1.7.	Pertes de charge locales .....	11
1.8.	Zone d'entrée et longueur de développement de la couche limite .....	11
1.9.	Profils de vitesse dans une conduite .....	13

### **Chapitre 2 : Ecoulements permanents dans les conduites en charge**

2.1.	Définitions et concepts .....	16
2.2.	Calcul des conduites uniques .....	18
2.2.1.	Détermination du débit en écoulement .....	19
2.2.2.	Détermination du diamètre .....	19
2.2.3.	Détermination de la perte de charge linéaire .....	20
2.3.	Calcul des conduites en série et en parallèle .....	21
2.3.1.	Conduites en série .....	21
2.3.2.	Conduites en parallèle .....	22
2.4.	Réservoirs interconnectés – problème des trois réservoirs .....	23
2.5.	Equilibrage des réseaux maillés .....	25
2.5.1.	Méthode de relaxation de Hardy-Cross .....	27
2.5.2.	Méthode de linéarisation de Wood-Charles .....	34
2.6.	Dimensionnement économique des réseaux .....	36
2.7.	Mesure du débit et vitesse dans les conduites en charge .....	39
2.7.1.	Les compteurs volumétriques .....	39
2.7.2.	Débitmètres déprimogènes.....	40
2.7.3.	Débitmètres à ultrason .....	43
2.7.4.	Débitmètres électromagnétiques .....	43
2.7.5.	Débitmètres à turbines et rotamètres .....	44



## **Chapitre 3 : Régimes transitoires en charge**

3.1.	Introduction .....	45
3.2.	Ecoulements quasi-stationnaires .....	47
3.2.1.	Vidange d'un bassin.....	47
3.2.2.	Transvasement entre deux réservoirs .....	49
3.3.	Mouvements oscillatoires des liquides .....	50
3.3.1.	Liquide sans frottement .....	51
3.3.2.	Résistance laminaire .....	53
3.3.3.	Résistance turbulente .....	55
3.3.4.	Oscillations entre deux réservoirs .....	57
3.4.	Régime transitoire – temps d'établissement d'un régime permanent .....	58
3.5.	Propagation des ondes élastiques – Phénomène du coup de bélier .....	60
3.5.1.	Causes fréquentes du coup de bélier .....	60
3.5.2.	Risques et dommages conséquents aux coups de bélier .....	61
3.5.3.	Analyse physique du coup de bélier .....	62
3.5.4.	Valeurs numériques du coup de bélier .....	65
3.5.5.	Equations différentielles de base .....	68
3.5.6.	Intégration du système différentiel .....	70
3.5.7.	Célérité des ondes .....	73
3.5.8.	Techniques d'analyse des régimes transitoires .....	76
3.6.	Protection contre le coup de bélier .....	77
3.6.1.	Protection basée sur des systèmes sans stockage d'énergie .....	78
3.6.2.	Protection basée sur des systèmes avec accumulation d'énergie .....	81
	Références bibliographiques .....	89

## Rappels d'hydrodynamique

### 1.1. Définition

On appelle écoulement en charge ou sous pression un écoulement de fluide qui s'établit dans une enceinte fermée, sans interface de contact entre l'air et l'eau. Ces écoulements dits encore « forcés » sont engendrés par les gradients de pression qui y règne dans la conduite ou l'enceinte fermée. La ligne d'eau dans ce cas (ligne piézométrique) se trouve en dessus de la génératrice supérieure de la conduite, à l'inverse des écoulements à surface libre où la ligne d'eau est visible et est l'interface de contact eau-air (Figure 1.1). Ce dernier type d'écoulement est, quant à lui, engendré par les forces de gravité.

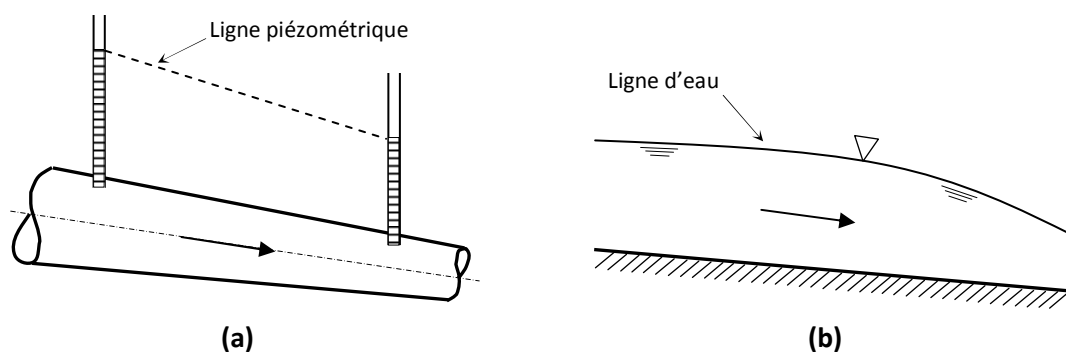


Figure 1.1. Schéma d'écoulements (a) en charge, (b) à ciel ouvert

## 1.2. Équations fondamentales du mouvement

Pour un liquide réel en mouvement, les équations générales du mouvement sous forme vectorielle s'écrivent :

$$\underbrace{\rho \vec{\gamma}}_{\text{forces d'inertie}} = \underbrace{\rho \vec{F}}_{\text{force de volume}} - \underbrace{\vec{\nabla} P}_{\text{forces de pression}} + \underbrace{\vec{f}_v}_{\text{forces de frottement visqueuses}} \quad (1.1)$$

Pour un écoulement de liquide newtonien incompressible, la force visqueuse due aux frottements est de la forme :  $f_v = \mu \nabla^2 \vec{V}$ .

Les composantes des vecteurs forces dans l'équation du mouvement sont :

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix}; \quad \vec{f}_v = \begin{Bmatrix} \mu \nabla^2 u \\ \mu \nabla^2 v \\ \mu \nabla^2 w \end{Bmatrix}; \quad \vec{\nabla} p = \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{Bmatrix}; \quad \vec{\gamma} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

Nous écrivons alors les équations fondamentales du mouvement de liquide newtonien comme suit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ \frac{dw}{dt} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \text{Equations de Navier-Stokes} \quad (1.3)$$

Avec :

$\vec{V} = (u, v, w)$  vecteur vitesse de l'écoulement

$\rho$  : Masse volumique du liquide

$\mu$  et  $\nu$  : viscosité dynamique et viscosité cinématique respectivement

$\nabla^2$  : Opérateur laplacien tel que  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

## 1.3. Régimes d'écoulement

*Osborne Reynolds* a réalisé une expérience permettant de visualiser les lignes de courant dans une conduite en verre horizontale à l'aide d'un filet de teinture (colorant). Chaque type

d'écoulement a été par la suite relié à un nombre sans dimension dit nombre de Reynolds.

Ce nombre s'écrit :  $R_e = \frac{VD}{\nu}$ , où  $D$  représente le diamètre de la conduite.

Le nombre de Reynolds traduit le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité.

- a)** Pour une vitesse  $v_1$  suffisamment faible de l'écoulement, le filet coloré reste parfaitement net et délimité et est parallèle à l'axe de la conduite. Le régime est dit laminaire et est caractérisé par  $R_e \leq 2000$ , les forces visqueuses sont prépondérants.
- b)** Pour une vitesse  $v_2$  légèrement supérieure à  $v_1$ , le filet coloré oscille et vibre. Ce régime se rencontre pour des valeurs de  $R_e$  tel que :  $2000 \leq R_e \leq 10^5$ , les forces de viscosité ont encore de l'importance vis-à-vis des forces d'inertie.
- c)** Si la vitesse est encore augmentée  $v_3 > v_2$ , le filet coloré se rompt et se divise en un très grand nombre de particules. C'est le régime dit « hydrauliquement rugueux » et est caractérisé par  $R_e > 10^5$ . Les forces d'inertie deviennent dominantes devant celles de viscosité.

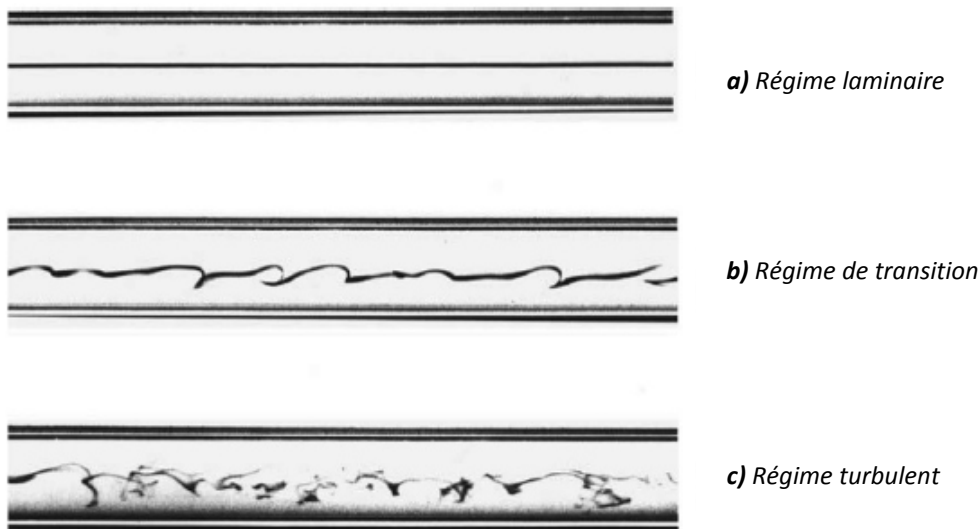


Figure 1.2. Différents régimes d'écoulement dans un tube

Les deux derniers types d'écoulement caractérisent les régimes turbulents. La vitesse d'une particule n'est plus parallèle à l'axe de la conduite et devient oscillante. La notion de vitesse moyenne est alors à introduire.

➤ Exemple :  $D = 100 \text{ mm}$  ;  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$   $\Rightarrow$  régime laminaire  $\Rightarrow V \leq \frac{2000\nu}{D}$

$\Rightarrow v \leq 0,02 \text{ m/s} \rightarrow$  Il en résulte que le régime laminaire n'intéresse que peu de fluide et rarement l'écoulement d'eau dans les conduites.

#### 1.4. Théorème de Bernoulli et conservation de l'énergie

Pour un écoulement permanent de liquide parfait, le théorème de Bernoulli stipule que l'énergie mécanique totale d'un filet liquide se conserve tout le long de la trajectoire de l'écoulement. Cependant pour un liquide réel, l'extension du théorème de Bernoulli doit tenir compte des tensions visqueuses dans l'écoulement. L'intégration des équations de *Navier-Stokes* le long de la trajectoire d'une particule liquide tenant compte des forces de dissipation visqueuses permet d'obtenir :

$$\underbrace{\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}}_{\text{énergie mécanique totale}} - \underbrace{v \int (\nabla^2 u dx + \nabla^2 v dy + \nabla^2 w dz)}_{\substack{\text{dissipation d'énergie} \\ \text{— pertes de charge —}}} = cte \quad (1.4)$$

Le terme dissipatif dans l'équation précédente représente ce qu'on appelle « la perte de charge » depuis l'origine du mouvement jusqu'au point considéré et est noté «  $J$  ».

L'équation finale du théorème de Bernoulli s'écrit alors :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{v_m^2}{2g} + J = H = cte \quad [m] \quad (1.5)$$

Où :

$z$  : Cote altimétrique du point considéré – énergie potentielle –

$\frac{p}{\varpi}$  : Hauteur représentative de la pression – énergie de pression –

$\frac{v_m^2}{2g}$  : Hauteur représentative de la vitesse – énergie cinétique –

$\varpi = \rho g$  : Poids spécifique du liquide.

L'évaluation du terme cinétique se fait tenant compte de la vitesse moyenne à travers la section transversale de l'écoulement, or la répartition des vitesses n'est pas uniforme (Figure 1.3). Pour tenir compte de l'inégale répartition des vitesses un terme correctif, dit coefficient de Coriolis «  $\alpha$  », est introduit.

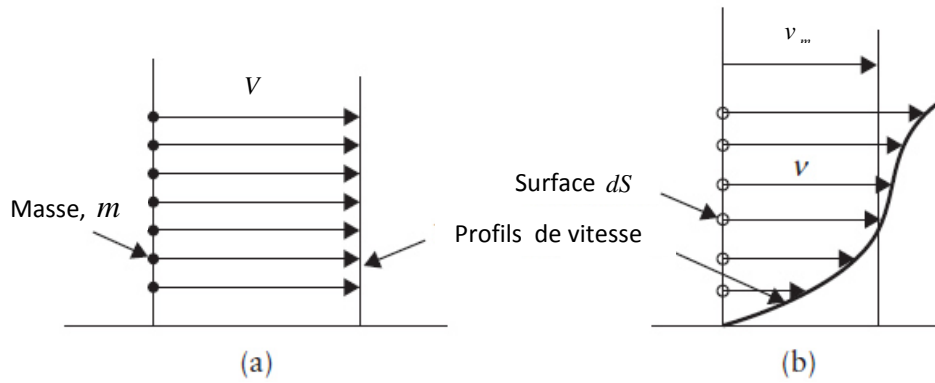


Figure 1.3. Profil de vitesse réel et profil idéalisé

Sachant que l'énergie cinétique totale sur la section est égale à la somme des énergies cinétiques de l'ensemble des particules fluides de masse «  $m$  », le coefficient  $\alpha$  est donné par :

$$\alpha = \frac{1}{S} \iint_S \left( \frac{v_i}{v_m} \right)^3 dS \quad (1.6)$$

Avec :

$v_i$  : vitesse individuelle des particules

$S$  : section de l'écoulement.

Pour un écoulement turbulent  $\alpha \in [1,03, 1,3]$  et est égal à 2 pour un écoulement laminaire.

## 1.5. Résistance hydraulique et estimation des pertes de charge

Un liquide en mouvement dans une conduite en charge est soumis à des pertes de charge (pertes d'énergie) de diverses causes. Une résistance distribuée (linéaire) est exercée par les parois de la conduite sur le liquide en écoulement due à la formation de la couche limite.

A cet effet, la vitesse diminue à partir de l'axe de la conduite pour être nulle à la paroi en raison des conduites tangentielles de frottement «  $\tau_0$  ». En régime permanent, la contrainte  $\tau_0$  est constante le long d'une conduite prismatique, puisque la couche limite est d'une épaisseur uniforme. Cette résistance à l'écoulement engendre une perte d'énergie mécanique uniforme le long de la conduite. Le gradient de cette perte d'énergie ou de charge, notée «  $j$  », est égale à la perte de charge totale divisée par le linéaire total parcouru

par le liquide :  $j = \frac{J}{L}$ .

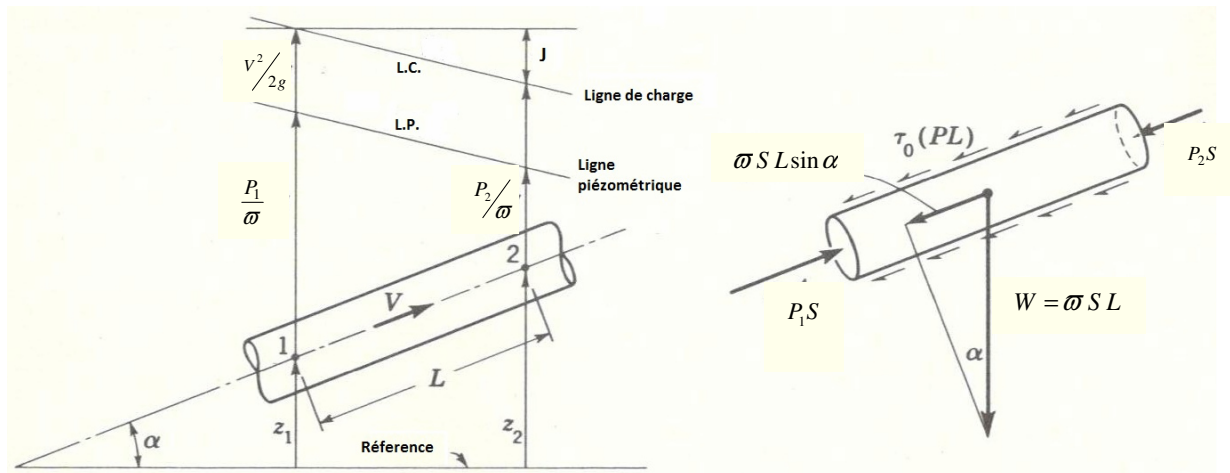


Figure 1.4. Traduction graphique du Bilan d'énergie et des forces sur un élémentaire liquide

L'application du théorème de Bernoulli entre les sections 1 et 2 de la conduite de diamètre constant (Figure 1.4) permet d'aboutir à l'estimation du frottement en écrivant l'équilibre des forces d'une tranche liquide :

$$J = \frac{\tau_0 PL}{\omega S} \quad (1.7)$$

Où :

$$\tau_0 = \omega R j \quad (1.8)$$

Avec :

$P$  : périmètre mouillé

$R$  : rayon hydraulique.  $R = \frac{D}{4}$  pour une conduite circulaire.

Par ailleurs, il a été démontré que la formule générale de la perte de charge s'écrit :

$$j = \frac{\lambda V^2}{D 2g} \quad (1.9)$$

C'est la formule de *Darcy-Weisbach* et où le facteur «  $\lambda$  » sans dimension est appelé « coefficient de frottement ». Par identification, il a été démontré que ce facteur vaut :

$$\lambda = \frac{8\tau_0}{\rho V^2} \quad (1.10)$$

Dans le cas général,  $\lambda = f\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$  avec  $\varepsilon$  : rugosité absolue des parois de la conduite. Pour l'évaluation de  $\lambda$  plusieurs formules ont été élaborées suivant la nature du régime d'écoulement.

- **Régime laminaire :**

Pour des nombres de *Reynolds* inférieurs à 2000 ou égale à cette valeur, la perte de charge  $J$  peut être obtenue analytiquement par intégration des équations de *Navier-Stokes*. Elle est donnée par la formule de *Hagen-Poiseuille* :

$$J = \frac{32\mu LV}{\varpi D^2} \quad (1.11)$$

Le coefficient de frottement  $\lambda$  est donné quant à lui par :

$$\lambda = \frac{64}{R_e} \quad (1.12)$$

Il est à remarquer que pour un régime laminaire, la perte de charge est linéairement proportionnelle à la vitesse d'écoulement.

- **Régime turbulent :**

Dans le cas d'un régime turbulent, les travaux de *Prandtl* et de *Nikuradse* ont fait révéler trois (03) zones :

- a) régime turbulent lisse dans lequel le facteur  $\lambda$  est seulement fonction du nombre de Reynolds et est exprimé par :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left[ \frac{R_e \sqrt{\lambda}}{2,51} \right] \quad (1.13)$$

- b) régime turbulent de transition où  $\lambda$  est fonction de  $\frac{\varepsilon}{D}$  et de  $R_e$ .

- c) régime turbulent rugueux dans lequel  $\lambda$  est fonction uniquement de la rugosité relative  $\frac{\varepsilon}{D}$ . L'expression de  $\lambda$  est alors :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left[ \frac{3,7D}{\varepsilon} \right] \quad (1.14)$$



*Colebrook* et *White* (1939) combinèrent les deux équations précédentes pour englober l'ensemble de la plage turbulente et donnèrent le modèle portant leur nom :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right] \quad (1.15)$$

La transcription graphique de cette équation est reportée sur un diagramme à division arithmétique-logarithmique. Ce nomogramme est appelé diagramme de *Moody* (Figure 1.5). Dû au caractère implicite de l'équation de *Colebrook-White*, plusieurs formules simplifiées explicites ont été développées pour alléger les calculs dans la pratique. Parmi tant, nous retiendrons celle du professeur *Achour* développée dans sa théorie de la MMR (Méthode du Modèle Rugueux de référence). L'expression approchée du coefficient  $\lambda$  est alors donnée par :

$$\lambda = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} \quad (1.16)$$

Avec  $\bar{R}$  s'écrivant :

$$\bar{R} = 2R_e \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{5,5}{R_e^{0,9}} \right) \right]^{-1} \quad (1.17)$$

A coté des méthodes de calcul reposant sur la formule de *Darcy-Weisbach*, il existe d'autres approches purement empiriques. Dans ce contexte, la formule de *Hazen-Williams* est d'un usage répandu en raison de sa simplicité et ses résultats. La formule s'écrit :

$$J = \left( \frac{3,592}{C_{HW}} \right)^{1,852} \frac{L}{D^{4,87}} Q^{1,852} \quad (1.18)$$

Avec  $C_{HW}$  : coefficient de *Hazen-Williams* dépendant de la nature des parois. Cette formule possède la particularité d'être simple et explicite ne nécessitant aucune itération lors des calculs. Suivant le modèle de *Hazen-Williams*, la perte de charge est donnée suivant le modèle de résistance :  $J = RQ^{1,852}$

Ce modèle simplifié est très pratique surtout pour le calcul des réseaux où le calcul rébarbatif se voit plus allégé.

Le tableau (1.1) suivant donne des indications sur le coefficient de débitance  $C_{HW}$ .

Tableau 1.1. Valeurs du coefficient de Hazen-Williams suivant la nature des conduites

Type de conduite	$C_{HW}$
Amiante-ciment	140
Fonte neuve	130
Fonte vieille (sans enduit)	40 - 120
Fonte avec enduit de ciment	130 – 150
Fonte avec enduit bitumineux	140 – 150
Béton	140
Cuivre	130 – 140
PVC	150

### 1.6. Résistance hydraulique dans les profils non-circulaires

Dans le but d'utiliser les mêmes modèles de formules pour les conduites non-circulaires, il est plus commode de traiter la forme non-circulaire comme une forme circulaire hypothétique équivalente, donnant le même gradient de perte de charge pour le même débit. La transformation est effectuée en exprimant le diamètre  $D$  en terme du rayon hydraulique  $R = S/P$ . Pour une conduite circulaire  $R = D/4$ , l'équation de *Darcy-Weisbach* devient :

$$J = \frac{\lambda L v^2}{8gR} \quad (1.19)$$

Le coefficient  $\lambda$  sera alors :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R} + \frac{2,51v}{4vR\sqrt{\lambda}} \right] \quad (1.20)$$

En raison de la forme non-circulaire, les contraintes de cisaillement aux parois ne sont pas constantes sur l'ensemble du périmètre mouillé alors que pour une section circulaire, elles le sont. Cette transformation ou artifice de calcul n'est pas exacte mais les expériences ont montré alors que l'erreur commise est minime.

Il est aussi important de noter que l'aire de la section circulaire équivalente n'est pas égale à la conduite réelle non-circulaire, c'est leur rayon hydraulique qui est le même.

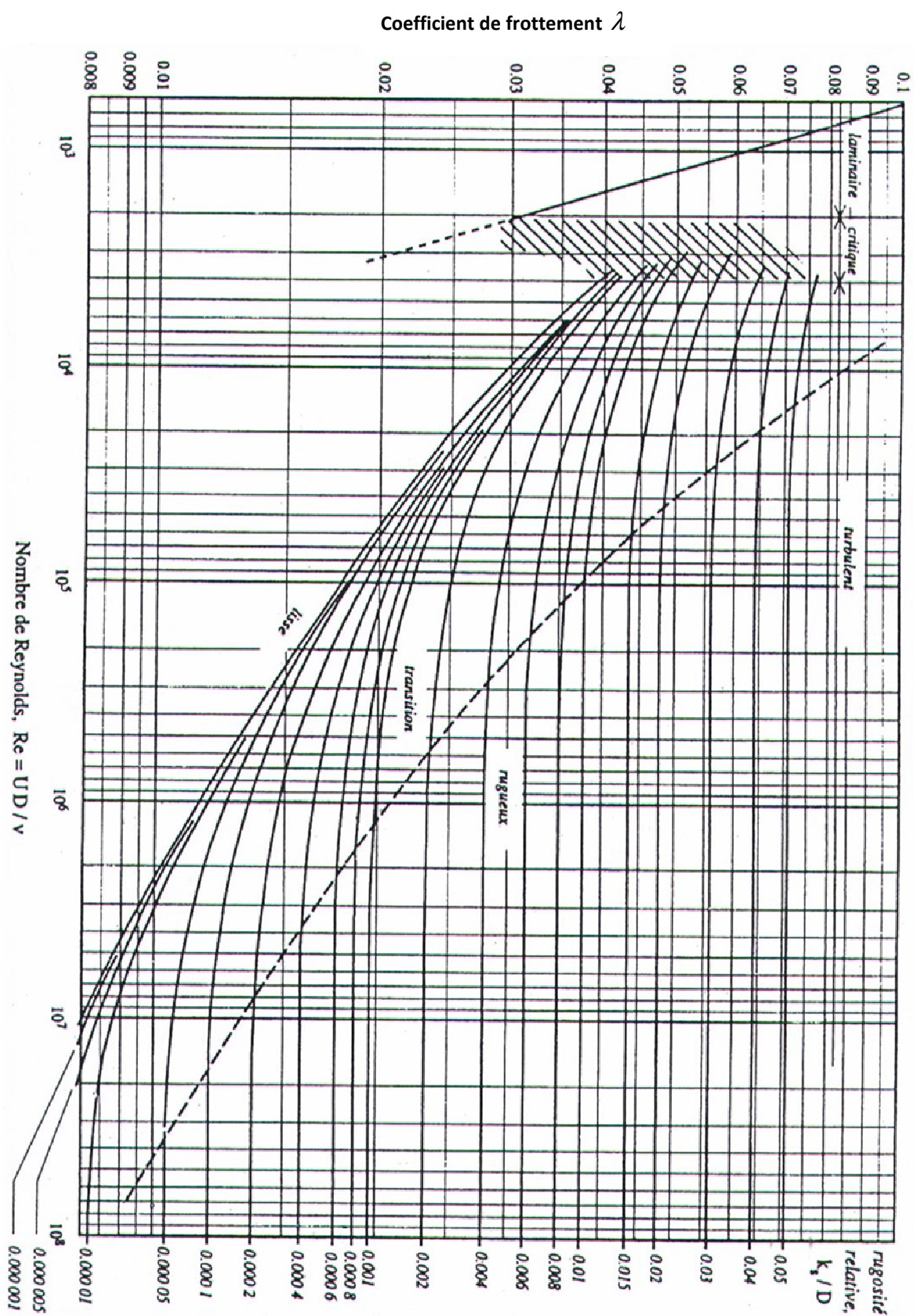


Figure 1.5. Diagramme de Moody

### 1.7. Pertes de charge locales

En plus des pertes de charge linéaires dues aux frottements, les pertes de charge locales apparaissent aux changements de sections, aux vannes, coudes et autres accessoires. Ces pertes locales sont parfois négligeables ou minimales comparativement aux pertes linéaires, mais cependant jouent un rôle capital dans l'effet de régulation du débit dans un système hydraulique en charge. La formule générale des pertes de charge singulières est :

$$J_s = k \frac{v^2}{2g} \quad (1.21)$$

Où  $k$  : coefficient dépendant de la nature et type de la singularité. Le tableau (1.2) en donne quelques valeurs usuelles de ce coefficient pour quelques singularités rencontrées dans les conduites circulaires. En annexe, un tableau plus exhaustif est donné.

### 1.8. Zone d'entrée et longueur de développement de la couche limite

A l'entrée d'une conduite et suite à l'apparition du frottement avec les parois, les couches au voisinage immédiat de celles-ci commencent alors à ralentir graduellement et ce de proche en proche vers le centre. Pour satisfaire la continuité l'écoulement au centre de la conduite accélère provoquant ainsi un gradient de vitesse dans le sens radial qui se développe en fonction de la distance. La région du champ d'écoulement où les effets de frottement se font ressentir s'appelle *la couche limite*. La zone extérieure à cette couche est alors à écoulement irrotationnel. A une certaine distance  $L_e$  de l'entrée, la couche limite atteint le centre et l'écoulement est dit alors *pleinement développé* (Figure 1.6). Cette longueur de d'entrée  $L_e$  dépend du régime d'écoulement et du diamètre de la conduite.

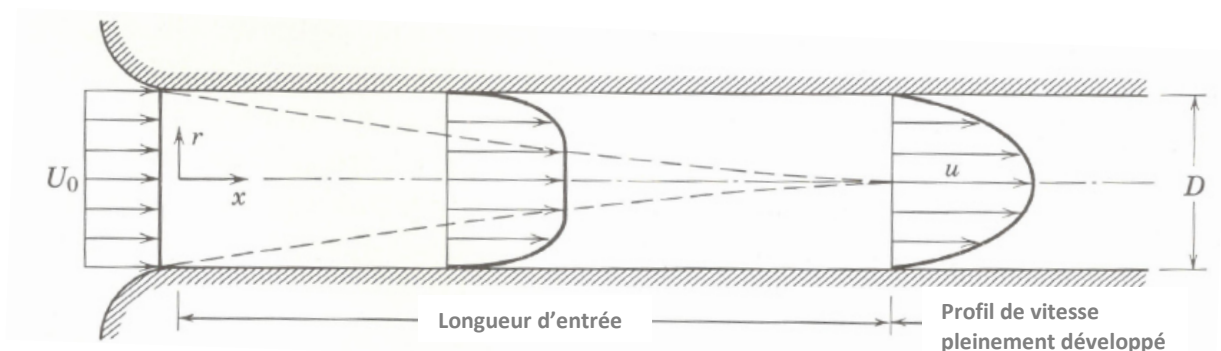
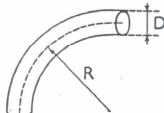
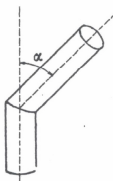
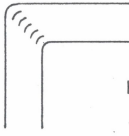
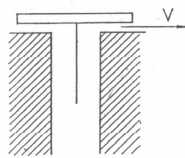
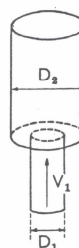



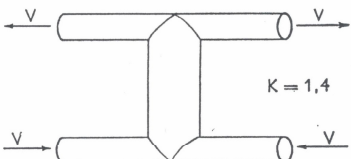
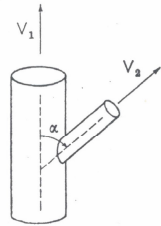
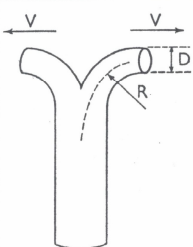
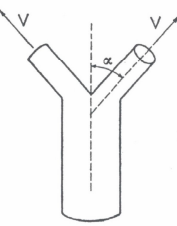

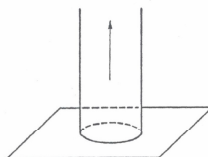
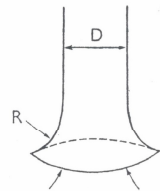


Figure 1.6. Développement de l'écoulement à l'entrée d'une conduite

Tableau 1.2. Coefficients de pertes de charge singlières dans des conduites circulaires

 <table border="1" data-bbox="426 327 553 524"> <thead> <tr> <th><math>\frac{R}{D}</math></th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,5</td><td>0,90</td></tr> <tr><td>0,75</td><td>0,45</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>0,35</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,25</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,20</td></tr> </tbody> </table> <p>Coude arrondi (angle droit)</p>	$\frac{R}{D}$	K	0,5	0,90	0,75	0,45	1,0	0,35	1,5	0,25	2	0,20	 <table border="1" data-bbox="820 322 948 524"> <thead> <tr> <th><math>\alpha</math></th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>15°</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>30°</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>45°</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>60°</td><td>0,7</td></tr> <tr><td>90°</td><td>1,3</td></tr> </tbody> </table> <p>Coude à angle vif</p>	$\alpha$	K	15°	0,1	30°	0,2	45°	0,5	60°	0,7	90°	1,3	 <p><math>K = 0,2 \text{ à } 0,3</math></p> <p>Coude muni de directrices (angle droit)</p>												
$\frac{R}{D}$	K																																					
0,5	0,90																																					
0,75	0,45																																					
1,0	0,35																																					
1,5	0,25																																					
2	0,20																																					
$\alpha$	K																																					
15°	0,1																																					
30°	0,2																																					
45°	0,5																																					
60°	0,7																																					
90°	1,3																																					
 <p><math>K \sim 2</math></p> <p>Soupape</p>	 <table border="1" data-bbox="820 636 948 837"> <thead> <tr> <th><math>\frac{D_1}{D_2}</math></th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,1</td><td>1,0</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,9</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,7</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,4</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,2</td></tr> </tbody> </table> <p>Élargissement brusque</p>	$\frac{D_1}{D_2}$	K	0,1	1,0	0,2	0,9	0,4	0,7	0,6	0,4	0,8	0,2	 <table border="1" data-bbox="1219 636 1347 837"> <thead> <tr> <th><math>\frac{D_2}{D_1}</math></th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,1</td><td>0,6</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,4</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,2</td></tr> </tbody> </table>	$\frac{D_2}{D_1}$	K	0,1	0,6	0,2	0,5	0,4	0,4	0,6	0,3	0,8	0,2												
$\frac{D_1}{D_2}$	K																																					
0,1	1,0																																					
0,2	0,9																																					
0,4	0,7																																					
0,6	0,4																																					
0,8	0,2																																					
$\frac{D_2}{D_1}$	K																																					
0,1	0,6																																					
0,2	0,5																																					
0,4	0,4																																					
0,6	0,3																																					
0,8	0,2																																					
 <p><math>K = 1</math></p> <p>Élargissement brusque</p>	 <table border="1" data-bbox="820 938 948 1151"> <thead> <tr> <th><math>\frac{D_2}{D_1}</math></th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,1</td><td>2,5</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>2,5</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>2,5</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>2,3</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>1,9</td></tr> <tr><td>0,9</td><td>1,5</td></tr> </tbody> </table> <p>Diaphragme mince et élargissement brusque</p>	$\frac{D_2}{D_1}$	K	0,1	2,5	0,2	2,5	0,4	2,5	0,6	2,3	0,8	1,9	0,9	1,5	 <p><math>K = 1,4</math></p> <p>Double T</p>																						
$\frac{D_2}{D_1}$	K																																					
0,1	2,5																																					
0,2	2,5																																					
0,4	2,5																																					
0,6	2,3																																					
0,8	1,9																																					
0,9	1,5																																					
 <table border="1" data-bbox="421 1261 553 1485"> <thead> <tr> <th><math>\alpha</math></th> <th><math>K_2</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>15°</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>30°</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>45°</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>60°</td><td>0,7</td></tr> <tr><td>90°</td><td>1,3</td></tr> </tbody> </table> <p>Dérivation latérale</p>	$\alpha$	$K_2$	15°	0,1	30°	0,2	45°	0,5	60°	0,7	90°	1,3	 <table border="1" data-bbox="820 1285 948 1485"> <thead> <tr> <th><math>\frac{R}{D}</math></th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,5</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>0,75</td><td>0,6</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,4</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,25</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>0,2</td></tr> </tbody> </table> <p>Bifurcation arrondie (angle droit)</p>	$\frac{R}{D}$	K	0,5	1,2	0,75	0,6	1	0,4	1,5	0,25	2,0	0,2	 <table border="1" data-bbox="1219 1285 1347 1485"> <thead> <tr> <th><math>\alpha</math></th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>15°</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>30°</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>45°</td><td>0,7</td></tr> <tr><td>60°</td><td>1,0</td></tr> <tr><td>90°</td><td>1,4</td></tr> </tbody> </table> <p>Bifurcation à bords vifs</p>	$\alpha$	K	15°	0,1	30°	0,3	45°	0,7	60°	1,0	90°	1,4
$\alpha$	$K_2$																																					
15°	0,1																																					
30°	0,2																																					
45°	0,5																																					
60°	0,7																																					
90°	1,3																																					
$\frac{R}{D}$	K																																					
0,5	1,2																																					
0,75	0,6																																					
1	0,4																																					
1,5	0,25																																					
2,0	0,2																																					
$\alpha$	K																																					
15°	0,1																																					
30°	0,3																																					
45°	0,7																																					
60°	1,0																																					
90°	1,4																																					
Pièces d'aspiration																																						
 <p>Droite <math>K = 0,9</math></p>	 <p>En paroi <math>K = 0,5</math></p>	 <table border="1" data-bbox="1219 1655 1347 1823"> <thead> <tr> <th><math>\frac{R}{D}</math></th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0,2</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,05</td></tr> </tbody> </table> <p>A entrée profilée</p>	$\frac{R}{D}$	K	0,2	0,2	0,5	0,1	0,8	0,05																												
$\frac{R}{D}$	K																																					
0,2	0,2																																					
0,5	0,1																																					
0,8	0,05																																					

Pour un régime laminaire, la longueur adimensionnelle d'entrée est donnée approximativement :

$$\frac{L_e}{D} \cong 0.05 R_e \quad (1.22)$$

Cette longueur augmente linéairement avec la vitesse pour atteindre, à la limite du régime laminaire  $R_e = 2300$ , une valeur de  $115 D$ .

Lorsque l'écoulement devient turbulent, cette longueur adimensionnelle est approchée par la formule suivante :

$$\frac{L_e}{D} = 1.359 R_e^{1/4} \quad (1.23)$$

Remarquons que pour un écoulement laminaire à haut nombre de *Reynolds*, cette longueur est plus petite qu'en régime turbulent ; sa dépendance au nombre de Reynolds devient ainsi plus faible. Pour plusieurs applications pratiques intéressant l'ingénieur, l'effet d'entrée et le développement de la couche limite devient presque insignifiante au-delà d'une longueur de dix fois le diamètre du tube. Ainsi, on peut écrire, avec une bonne approximation :

$$\frac{L_e}{D} \approx 10 D \quad (1.24)$$

En pratique, on peut négliger complètement cet effet d'entrée et considérer alors que l'écoulement est pleinement développé sur toute la longueur de la conduite si celle-ci est très longue.

### 1.9. Profils de vitesse dans une conduite

Comme l'on a vu, suivant le nombre de Reynolds, l'écoulement peut être laminaire ou turbulent. Pour un écoulement laminaire pleinement développé, la solution exacte des équations de *Navier-Stokes* donne un profil parabolique des vitesses tel que :

$$\frac{u}{U} = 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (1.25)$$

Avec  $u = u(r)$  la vitesse ponctuelle longitudinale et  $U = V_{\max}$  est la vitesse maximale atteinte au centre de la conduite  $r = 0$ .

Ainsi, pour les écoulements laminaires, la vitesse axiale vaut le double de la vitesse moyenne :

$$\frac{v_m}{U} = \frac{1}{2} \quad (1.26)$$

Cependant, mis à part quelques problèmes à très faible vitesse ou de lubrification, la plus part des écoulements qui intéressent l'ingénierie hydraulique sont turbulents. Comme aucune relation universelle reliant le champ de contrainte au champ de vitesse moyenne n'existe, nous sommes forcés alors à recourir aux mesures expérimentales.

Le profil de vitesse pour un écoulement turbulent dans une conduite lisse peut alors être représenté par une équation empirique de type puissance :

$$\frac{v_m}{U} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad (1.27)$$

Où l'exposant  $n$  varie avec le nombre de *Reynolds*. La valeur de  $n$  est de 6 pour  $R_e = 4 \times 10^3$ . Pour un nombre de *Reynolds* de  $1.1 \times 10^5$ , l'exposant  $n$  vaut 7. Cette valeur augmente à 10 pour un écoulement à  $R_e = 3.2 \times 10^6$ . D'après l'équation de continuité reliant le débit à la vitesse, le ratio de la vitesse moyenne à la vitesse axiale peut être calculé, ce qui donne :

$$\frac{v_m}{U} = \frac{\bar{V}}{U} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \quad (1.28)$$

On peut ainsi constater que plus  $n$  augmente ce ratio augmente et le profil de vitesse devient plus "gonflé" et aplati avec un fort gradient au voisinage de la paroi (Figure 1.7).

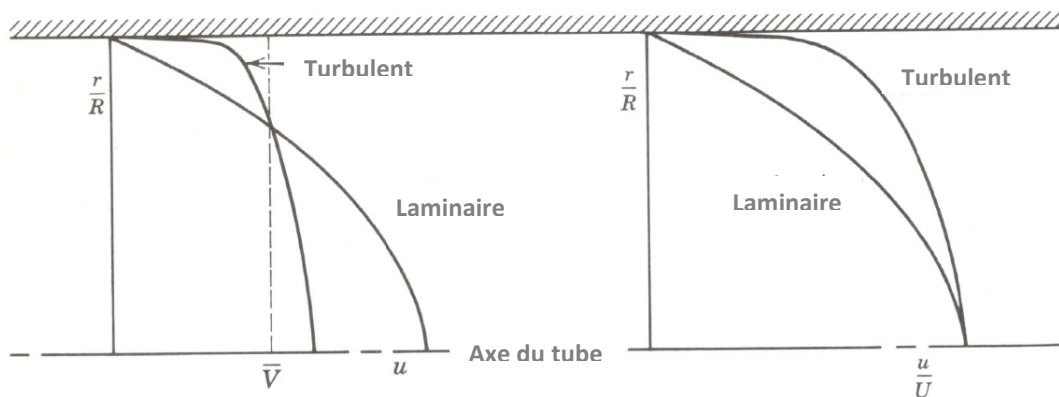


Figure 1.7. Profil de vitesse dans une conduite lisse en régime laminaire et turbulent à  $R_e = 4 \cdot 10^3$

A titre indicatif, pour  $n = 6$ ,  $v_m/U = 0.79$  ; alors que pour  $n = 10$ ,  $v_m/U = 0.87$  . On peut aussi constater sur la figure (1.7) que, comparativement au régime laminaire de même débit, les vitesses à l'axe du tube diffèrent. Alors que pour l'écoulement laminaire, la vitesse au centre est le double de la vitesse moyenne (équation 1.26), leur rapport s'approche de l'unité pour l'écoulement turbulent à grand nombre de *Reynolds*. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle le coefficient de correction de l'énergie cinétique  $\alpha$  (équation 1.6) prend ses valeurs connues aussi différemment pour les deux régimes.



## Chapitre 2

# *Ecoulements permanents dans les conduites en charge*

### 2.1. Définitions et concepts

Le calcul des conduites en charge en régime permanent revêt un grand intérêt et une importance capitale dans la pratique, d'où le soin particulier à accorder à cette catégorie de problème. Faut-il encore souligner que le régime permanent constitue la condition initiale pour le calcul du régime instationnaire. Toute erreur dans la première catégorie induit alors systématiquement un calcul erroné dans la seconde.

On appelle écoulement permanent ou stationnaire un écoulement dont les variables d'état (débit  $Q$ , vitesse  $v$ , pression  $p$ , ...etc.) sont invariables dans le temps. En d'autre terme, la dimension temporelle disparaît dans les équations dynamiques  $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ . On néglige ainsi les fluctuations turbulentes du vecteur vitesse et on considère alors que la vitesse moyenne est constante dans le temps. ( $\bar{v} = cte = v$ ) avec  $v = \bar{v} + v'$ .

On classifie les systèmes en charge en trois (03) catégories :

- Conduite unique : elle relie deux points (ex : entre deux réservoirs) avec un diamètre unique et ne présente aucun chargement de section ou bifurcation (Figure 2.1).

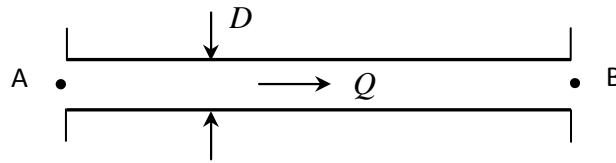


Figure 2.1 Conduite unique

- Conduite mixte ou composée : au cours de son transit de débit, la conduite présente des changements de diamètre et de matériaux (rugosité). Si les changements de diamètres sont croissants ou bien décroissants, la conduite est dite « télescopique ».

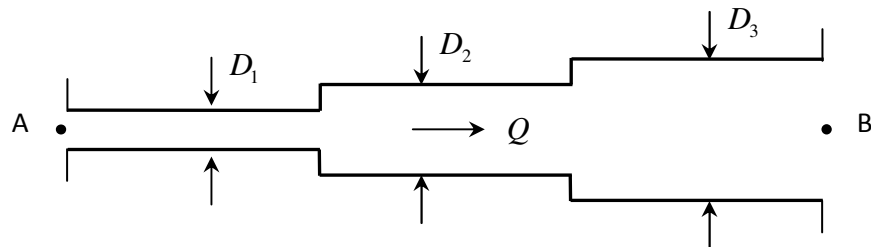


Figure 2.2 Conduite mixte télescopique

- Réseau de conduites : dans ce cas le débit initial  $Q$  se départage et emprunte différents chemins. Si les chemins pris dans les conduites formant le réseau est alors dit « ramifié ». Si par contre une boucle fermée se présente dans l'interconnexion des conduites (circuit fermé), le réseau est dit « maillé » (Figure 2.3).

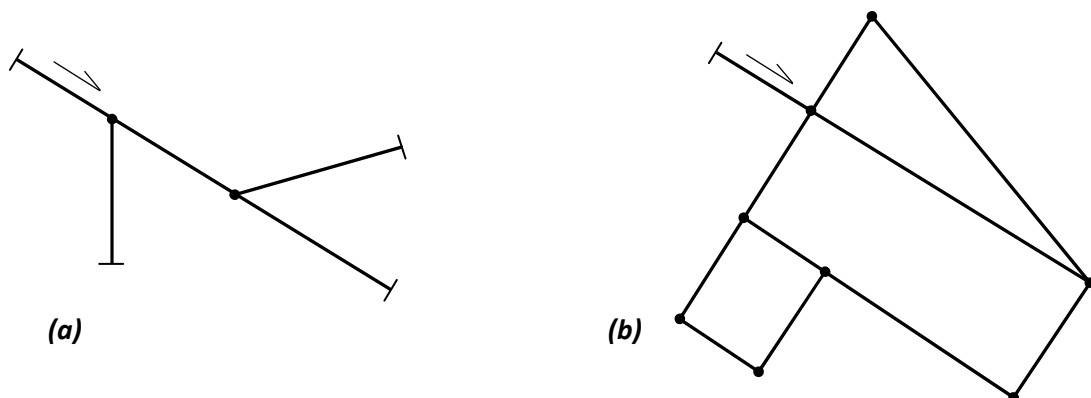


Figure 2.3 Types de réseaux : (a) arborescent (ramifié), (b) réseau maillé (bouclé)

**Remarque** : quelque soit la complexité topologique du réseau, ce dernier peut toujours être ramené à un calcul de réseaux élémentaires imbriqués (ex : maillé + ramifications sortant des nœuds). La figure (2.4) ci-dessous donne une vue d'ensemble de cette typologie.

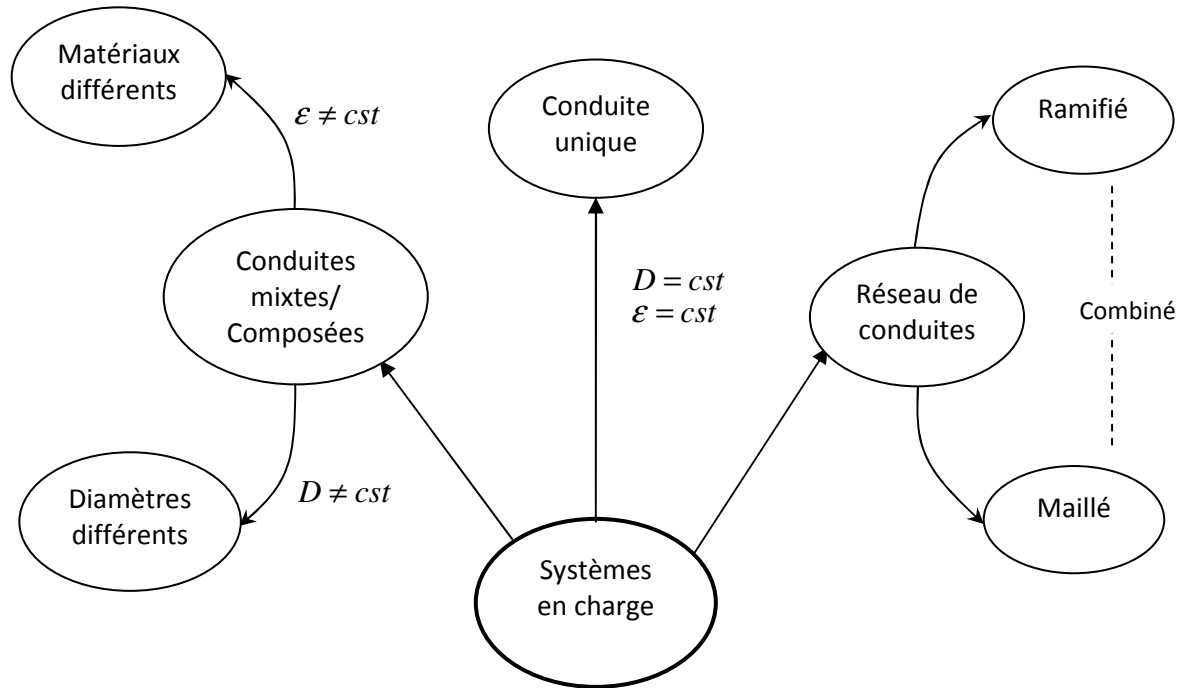


Figure 2.4 Schéma synoptique de la typologie des réseaux en charge

## 2.2. Calcul des conduites uniques

Le calcul des conduites uniques en régime permanent revient à résoudre trois classes de problèmes pratiques, la recherche du débit  $Q$ , la recherche du diamètre  $D$ , ou encore la détermination de la perte de charge  $J$ . Au sens mathématique, ces problèmes sont liés par une relation fonctionnelle  $\Psi$  tel que :

$$\Psi(Q, D, \varepsilon, \nu, J) = 0 \quad (2.1)$$

Ces cinq paramètres (débit, diamètre, rugosité absolue, viscosité cinématique et perte de charge) influençant l'écoulement incompressible stationnaire en conduite unique sont reliés par trois relations, à savoir :

- relation de la loi de frottement (ex : *Darcy-Weisbach*) ;
- relation du coefficient de frottement (ex : *Colebrook-White*) ;

- nombre adimensionnel de Reynolds.

Le problème est alors mathématiquement déterminé et le système permet d'en trouver le troisième. Il est extrêmement rare de rencontrer un problème lié à la détermination de la rugosité  $\varepsilon$  ou la viscosité cinématique  $\nu$ . Seuls les paramètres  $Q$ ,  $J$  et  $D$  présentent un réel intérêt.

### 2.2.1. Détermination du débit en écoulement

Dans cette classe de problème, il s'agit de déterminer la capacité d'évacuation de la conduite. Ainsi, connaissant  $D$ ,  $J$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$ , quel serait le débit  $Q$  écoulé par la conduite ?

La relation fonctionnelle liée à ce problème est :

$$Q = \Gamma(D, J, \varepsilon, \nu) \quad (2.2)$$

Par ailleurs :

$$J = \frac{\lambda L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \nu = \sqrt{\frac{2gDJ}{\lambda L}} \quad (2.3)$$

En combinant cette relation avec la formule de *Colebrook-White*, tenant compte du nombre de *Reynolds*, on aboutit à :

$$Q = -2\sqrt{2gD\frac{J}{L}} \log \left[ \frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51\nu}{D\sqrt{2gD\frac{J}{L}}} \right] \frac{\pi D^2}{4} \quad (2.4)$$

Cette expression est explicite et ne nécessite aucune itération. C'est d'ailleurs la seule classe de problème dont le calcul est direct et explicite.

### 2.2.2. Détermination du diamètre

Il est alors question, dans cette seconde classe de problème, de déterminer le diamètre  $D$  permettant d'assurer le transit d'un débit  $Q$  connaissant  $J$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$ . La fonctionnelle de ce problème s'écrit :

$$D = \beta(Q, J, \varepsilon, \nu) \quad (2.5)$$

La combinaison de la formule de *Colebrook-White* et celle de *Darcy-Weisbach* donne, pour la détermination du diamètre.

$$D = \left[ \frac{8Q^2 L \lambda}{\pi^2 g J} \right]^{1/5} \quad (2.6)$$

Remarquons alors que l'expression du diamètre est d'une forme implicite où la connaissance de  $\lambda$  nécessite elle aussi celle de  $D$ , qui est a priori inconnu. La solution est alors obtenue par approximations successives jusqu'à convergence avec une certaine précision admise à cet effet. Une formulation explicite approchée a été donnée par *Achour* (2007) par usage de la MMR comme suit :

$$D = 1,35 \bar{D} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.7)$$

Où :  $\bar{D}$  est le diamètre du modèle rugueux de référence :

$$\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left[ \frac{Q^2}{g j} \right]^{1/5} \quad (2.8)$$

$j$  : gradient de la perte de charge.  $j = \frac{J}{L}$

Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  est donné quant à lui par :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\pi \bar{D} v} \quad (2.9)$$

Cette technique approchée occasionne une erreur relative de 0,5% au maximum sur le calcul de  $D$  dans le domaine turbulent,  $R_e > 2300$  et pour  $0 \leq \varepsilon / D \leq 0,05$ .

### 2.2.3. Détermination de la perte de charge linéaire

Pour des valeurs connues du débit  $Q$ , du diamètre  $D$  de la conduite, il est alors demandé dans cette catégorie de problème d'évaluer le gradient de la perte de charge  $j$ . La connaissance de ce gradient est d'une importance capitale dans la pratique. Du point de vue mathématique, le problème se résume par la fonctionnelle suivante :

$$j = \Phi(Q, D, \varepsilon, v) \quad (2.10)$$

Comme précédemment, le calcul par la formule de *Darcy-Weisbach* nécessite la détermination du coefficient de frottement  $\lambda$ . Ce dernier s'obtient au prix d'un certain effort de calcul implicite si l'on opte pour la formule de *Colebrook-White*. Cependant si l'on utilise l'approche de la MMR, le calcul deviendrait plus aisé. En éliminant le coefficient  $\lambda$  entre les relations approchées de *Achour* et de *Darcy-Weisbach*, le gradient de la perte de charge linéaire  $j$  s'exprime par :

$$j = \frac{2Q^2}{g\pi^2 D^2} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} \quad (2.11)$$

La perte de charge totale est alors le produit du gradient  $j$  par le linéaire total parcouru par le liquide.

### 2.3. Calcul des conduites en série et en parallèle

Comme ceci a été noté avant, chaque réseau, si complexe soit-il, peut être ramené à un schéma topologique plus simple par décomposition en élément simple. L'une des techniques de réduction topologique est le regroupement des conduites en séries et en parallèle pour ainsi former des conduites équivalentes.

#### 2.3.1. Conduites en série

Dans ce cas, la perte de charge totale  $J_T$  est égale à la somme des PDC de chaque conduite :

$$J_T = J_1 + J_2 + \dots + J_m \quad (2.12)$$

Le débit transité est quant à lui le même pour toute les conduites :

$$Q_T = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n \quad (2.13)$$

Sachant que la formule générale des pertes de charge est de type :

$$J = RQ^n \quad (2.14)$$

Avec :  $R$  la résistance de la conduite et  $n$  exposant hydraulique dépendant du modèle de frottement adopté.

$$\rightarrow \text{Darcy-Weisbach} \left[ \begin{array}{l} R = \frac{8\lambda L}{\pi^2 g D^5} \\ n = 2 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\rightarrow \text{Hazen-Williams} \left[ \begin{array}{l} R = \left[ \frac{3,592}{C_{Hw}} \right]^{1,852} \frac{L}{D^{4,87}} \\ n = 1,852 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

On aura alors, en combinant les formules (2.14) et (2.12) tenant compte de (2.13) :

$$R_{eq} Q_T^n = R_1 Q_1^n + R_2 Q_2^n + \dots + R_m Q_m^n \quad (2.17)$$

Ou encore :

$$R_{eq} Q_T^n = \left( \underbrace{R_1 + R_2 + \dots + R_m}_{\sum R_i} \right) Q_T^n \quad (2.18)$$

Donc pour des conduites en série, la résistance équivalente s'exprime comme la somme des résistances de chaque conduite :

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^m R_i \quad (2.19)$$

### 2.3.2. Conduites en parallèle

Dans le cas des conduites en parallèle, le débit total se répartit sur l'ensemble des branches.

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m \quad (2.20)$$

La perte de charge est par contre la même quelque soit le chemin parcouru par le débit partiel  $Q_i$  :

$$J_T = J_1 = J_2 = \dots = J_m \quad (2.21)$$

Le débit étant lié à la PDC par la relation de type :

$$Q = K J^\alpha \quad (2.22)$$

Où :  $K$  est la conductance de la conduite et  $\alpha = \frac{1}{n}$ .

La conductance est liée à la résistance par :

$$K = \frac{1}{R^\alpha} \quad (2.23)$$

En remplaçant (2.23) dans (2.20), tenant compte de (2.21), on trouve :

$$K_e J_T^\alpha = K_1 J_1^\alpha + K_2 J_2^\alpha + \dots + J_m^\alpha K_m \quad (2.24)$$

Ou bien :

$$K_e J_T^\alpha = \left( \underbrace{K_1 + K_2 + \dots + K_m}_{\sum K_i} \right) J^\alpha \quad (2.25)$$

Ainsi donc pour des conduites en parallèle, la conductance équivalente s'exprime comme la somme des conductances de chaque conduite :

$$K_{eq} = \sum_{i=1}^m K_i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_{eq}^\alpha} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{R_i^\alpha} \quad (2.26)$$

Il est à noter ici l'analogie avec les circuits électriques où le calcul des résistances en série et en parallèle est de même type que les formules (2.19) et (2.26), cependant avec la seule différence dans l'exposant  $\alpha$ , valant l'unité dans les circuits électriques. C'est d'ailleurs cette relation de linéarité entre tension et courant qui fait la différence dans l'analogie du calcul des réseaux hydrauliques et les réseaux électriques.

## 2.4. Réservoirs interconnectés – problème des trois réservoirs

Le problème d'interconnexion des réservoirs est l'un des problèmes classiques des réseaux en charge. C'est l'un des exemples typiques où l'on doit satisfaire conjointement l'équation de continuité et l'équation d'énergie sur l'ensemble du réseau. À la différence des réseaux maillés, présentant la même problématique, celui-ci ne possède pas de boucles.

Considérons trois réservoirs interconnectés au nœud  $J$ . Les altitudes des plans d'eau des réservoirs A, B et C sont connues ainsi que les caractéristiques des conduites assurant le lien. Il est alors question de trouver la répartition des débits dans chaque conduite, AJ, JB, et JC, tenant compte d'un éventuel soutirage  $q$  au nœud  $J$  (Figure 2.5).



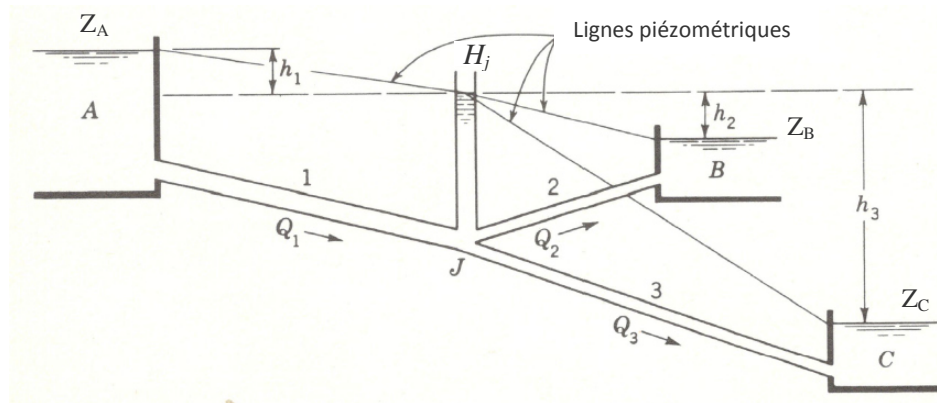


Figure 2.5 Problème des réservoirs interconnectés

La méthode de résolution dite « méthode nodale » consiste à faire une estimation arbitraire de  $H_j$  à partir de laquelle on calcule les débits dans chaque conduite. Si alors la continuité n'est pas satisfaite en J, le calcul se refait avec d'autres estimations de  $H_j$  jusqu'à convergence. L'algorithme général du calcul est résumé dans l'organigramme ci-dessous.

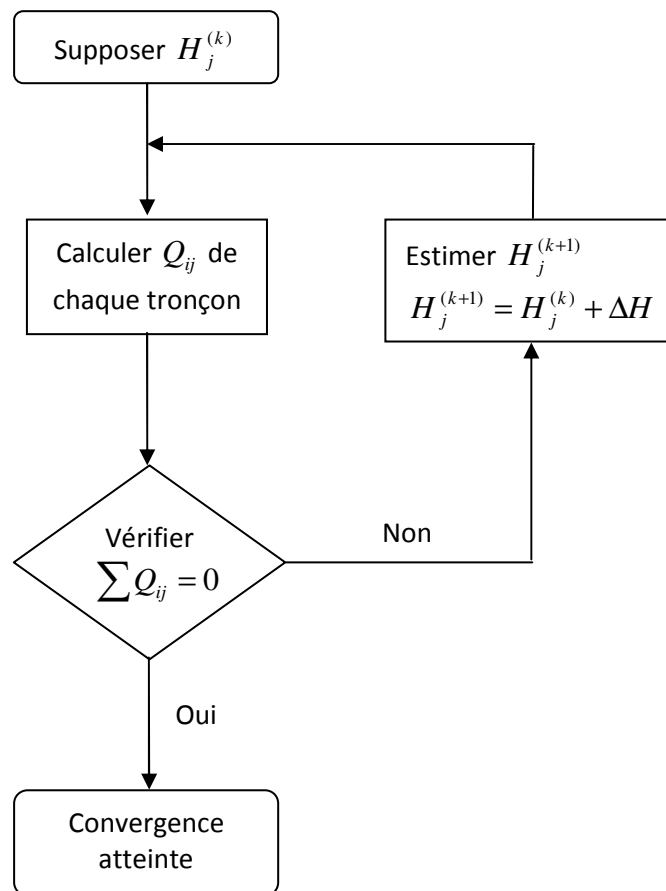


Figure 2.8 Organigramme de résolution des réservoirs interconnectés

La conservation de l'énergie peut être exprimée sous la forme matricielle générale qui suit :

$$\begin{bmatrix} Z_A - H_j \\ Z_B - H_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_i - Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{signe } R_{Aj} (Q_{Aj})^2 \\ \text{signe } R_{Bj} (Q_{Bj})^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{signe } R_{ij} (Q_{ij})^2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

La condition de continuité quant à elle s'exprime par :

$$\sum_{i=1}^m Q_{ij} - q = 0 \quad (2.28)$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, une correction systématique de la charge  $H_j$  supposée s'obtient à l'itération par :

$$H_j^{(K+1)} = H_j^{(K)} + \Delta H \quad (2.29)$$

La correction  $\Delta H$  à apporter à l'itération (K+1) peut être obtenue en admettant un développement limité au premier ordre, ce qui donnerait :

$$\Delta H = \frac{2(\sum Q_{ij} - q)}{\sum \frac{Q_{ij}}{J_e}} \quad (2.30)$$

Il est à noter que l'évaluation des débits se réduit aux problèmes de conduites uniques sous un gradient  $j = \frac{J_e}{L}$  où il est question de trouver le débit  $Q$ .

## 2.5. Equilibrage des réseaux maillés

Le principal but de l'équilibrage ou balancement des réseaux en boucle est de déterminer les débits et les pressions dans le réseau maillé. Cependant, le problème se posant est que la répartition des débits et charges dans le réseau maillé obéit au principe de l'énergie minimum, ce qui a pour conséquence que la moindre modification dans le réseau entraîne une redistribution des débits, donc la solution dépend de ce qui se passe dans chaque élément du réseau. L'autre difficulté provient du caractère non linéaire de l'équation reliant le débit à la perte de charge, ce qui complique d'avantage la solution.

Le sens d'écoulement à priori est inconnu, le problème se résout en satisfaisant simultanément (Figure 2.6)

- L'équation de continuité ;
- L'équation de l'énergie.

Pour ce faire, ces principes se traduisent comme suit (Figure 2.6):

- **Loi de Kirchhoff (ou des nœuds):**

Cette loi traduit le principe de continuité, donc la somme algébrique des débits aux nœuds est nulle.

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0 \quad (2.31)$$

- **Loi d'Ohm (ou des mailles):**

Elle se traduit par la conservation de l'énergie, cela signifie que la somme des pertes de charge sur un circuit est nulle.

$$\sum_{j=1}^m J_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^m R_{ij} Q_{ij}^2 = 0 \quad (2.32)$$

Ces lois doivent alors être satisfaites sur l'ensemble du réseau.

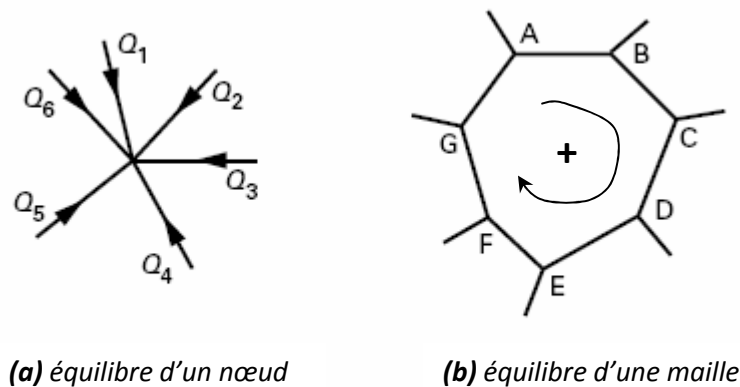


Figure 2.6 Lois conservatives du réseau maillé.

Pour résoudre ces équations simultanées, trois grandes classes de méthodes ont été développées. Par ordre chronologiques celles-ci sont : les méthodes dites analogiques, méthodes de relaxation et les méthodes de corrections simultanées (Figure 2.7). Si les premières sont anachroniques, les dernières se prêtent particulièrement pour un traitement informatique alors que la seconde classe revêt un intérêt beaucoup plus pédagogique.

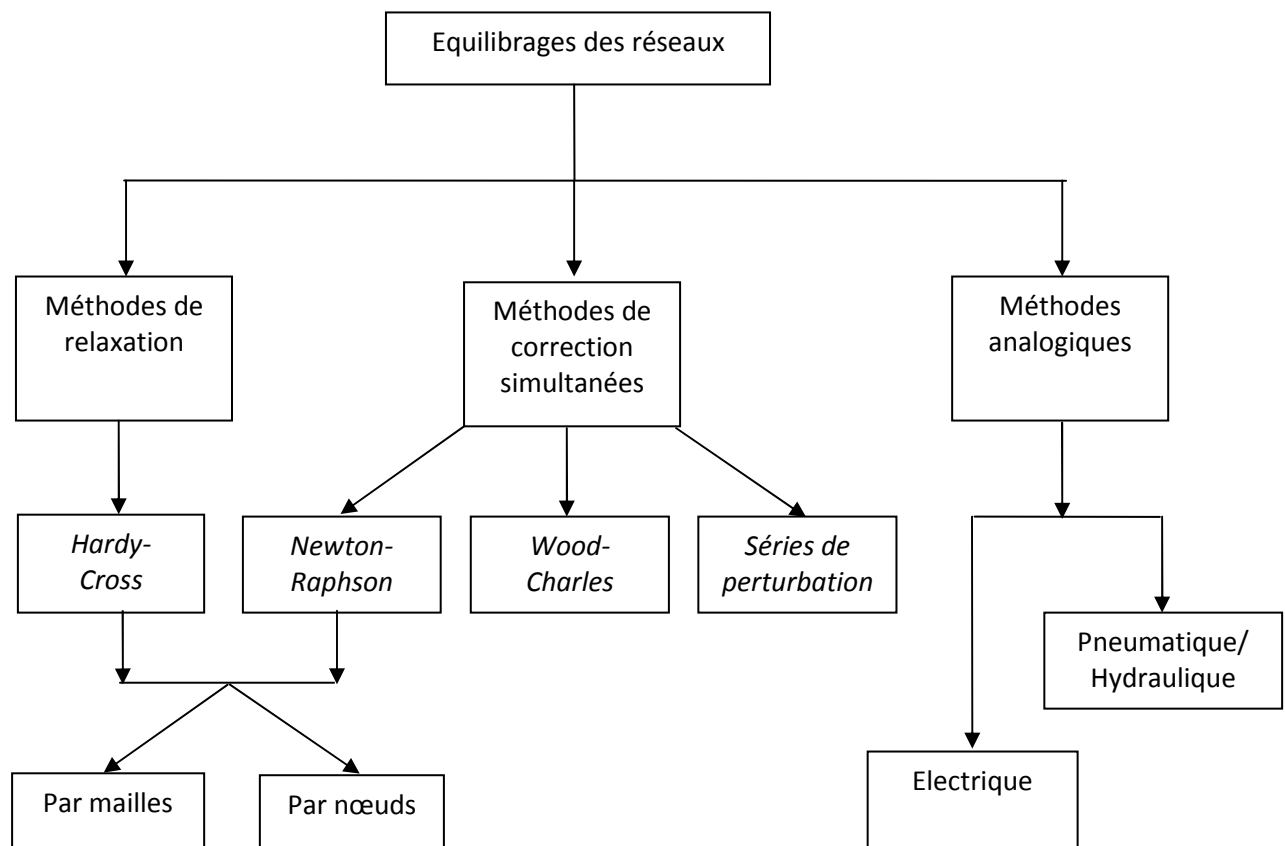


Figure 2. 7 Technique d'équilibrage et calcul des réseaux maillés

Pour un intérêt didactique, nous présentons en premier lieu la méthode de relaxation de *Hardy-Cross*, pour se pencher par la suite sur la méthode la plus commode, simple et efficace, en l'occurrence celle de *Wood-Charles*.

### 2.5.1. Méthode de relaxation de *Hardy-Cross*

Développée initialement dans les années 1920 par *Hardy-Cross* pour le calcul des structures hyperstatiques, la méthode a été par la suite appliquée par son auteur en 1936 pour l'équilibrage des réseaux en charge par relaxations. Son principe consiste à remplacer la simultanéité de l'interaction des conduites du réseau par un processus d'étude itérative (d'où le nom de relaxation) à chaque maille pour atteindre la solution désirée en partant d'une répartition initiale arbitraire. A ce titre, elle peut être vue comme une approche de type *Gauss-Seidel* en calcul matriciel. Quoique la méthode jouisse d'une efficacité et simplicité, elle souffre néanmoins de l'inconvénient d'une convergence lente.

Au départ, une répartition initiale des débits est faite sur l'ensemble des branches du réseau de conduite de manière à ce que la continuité aux nœuds soit satisfaite (loi de Kirchhoff). Restera alors à « forcer la main » à l'équation d'énergie (loi d'Ohm) pour résoudre le problème. En général, pour la première approximation, la condition d'Ohm n'est pas satisfaite pour la maille considérée vu que le débit initial choisi n'est pas exact:

$$\sum J \neq 0 \Rightarrow \sum R_j Q_j^n \neq 0 \quad (2.33)$$

Si l'on désigne l'écart du débit exact et celui choisi, on écrit alors :

$$\Delta Q_j = Q_{ex} - Q_j \quad (2.34)$$

On peut ainsi envisager d'apporter la correction nécessaire  $\Delta Q$  pour les branches de la maille de sorte à absorber les erreurs de la répartition initiales. En appliquant à chaque tronçon de la maille un développement limité de *Taylor* tronqué au premier ordre pour l'équation de la perte de charge, on trouve :

$$J_{ex} = J_j + \frac{\partial J_j}{\partial Q_j} \Delta Q + \Re(\Delta Q^2) \quad (2.35)$$

Pour la maille considérée, on a :

$$\sum_{i,j=1}^m J_{ex} = \sum_{i,j=1}^m J_j + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial J_j}{\partial Q_j} \Delta Q \quad (2.36)$$

Et comme :

$$\sum_{i,j=1}^j J_{ex} = 0 \quad (2.37)$$

L'équation (2.36) devient :

$$\sum_{i,j=1}^m J_j = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial J_j}{\partial Q_j} \Delta Q \quad (2.38)$$

La correction du débit s'écrit donc :

$$\Delta Q_j = - \frac{\sum_{i,j=1}^j J}{\sum_{i,j=1}^j \frac{\partial J_j}{\partial Q_j}} \quad (2.39)$$

En utilisant le modèle de *Hazen-Williams* pour le calcul des pertes de charge ( $n = 1,852$ ), on aura en final :

$$\Delta Q_j = \frac{- \sum_{i,j=1}^j R \cdot Q^{1.852}}{1.852 \cdot \sum_{i,j=1}^j R \cdot Q^{0.852}} \quad (2.40)$$

Soit encore :

$$\Delta Q_j = \frac{- \sum_{i,j=1}^j R \cdot Q^{1.852}}{1.852 \sum_{i,j=1}^j \frac{J_j}{Q_j}} \quad (2.41)$$

Dans le but d'adaptation numérique à la programmation de la méthode, on peut écrire :

$$\Delta Q_j = \frac{- \sum_{i,j=1}^j R \cdot Q_j |Q_j|^{0.852}}{1.852 \sum_{i,j=1}^j \frac{J_j}{Q_j}} \quad (2.42)$$

Cette correction est à appliquer à l'ensemble des tronçons de la maille considérée tel que :

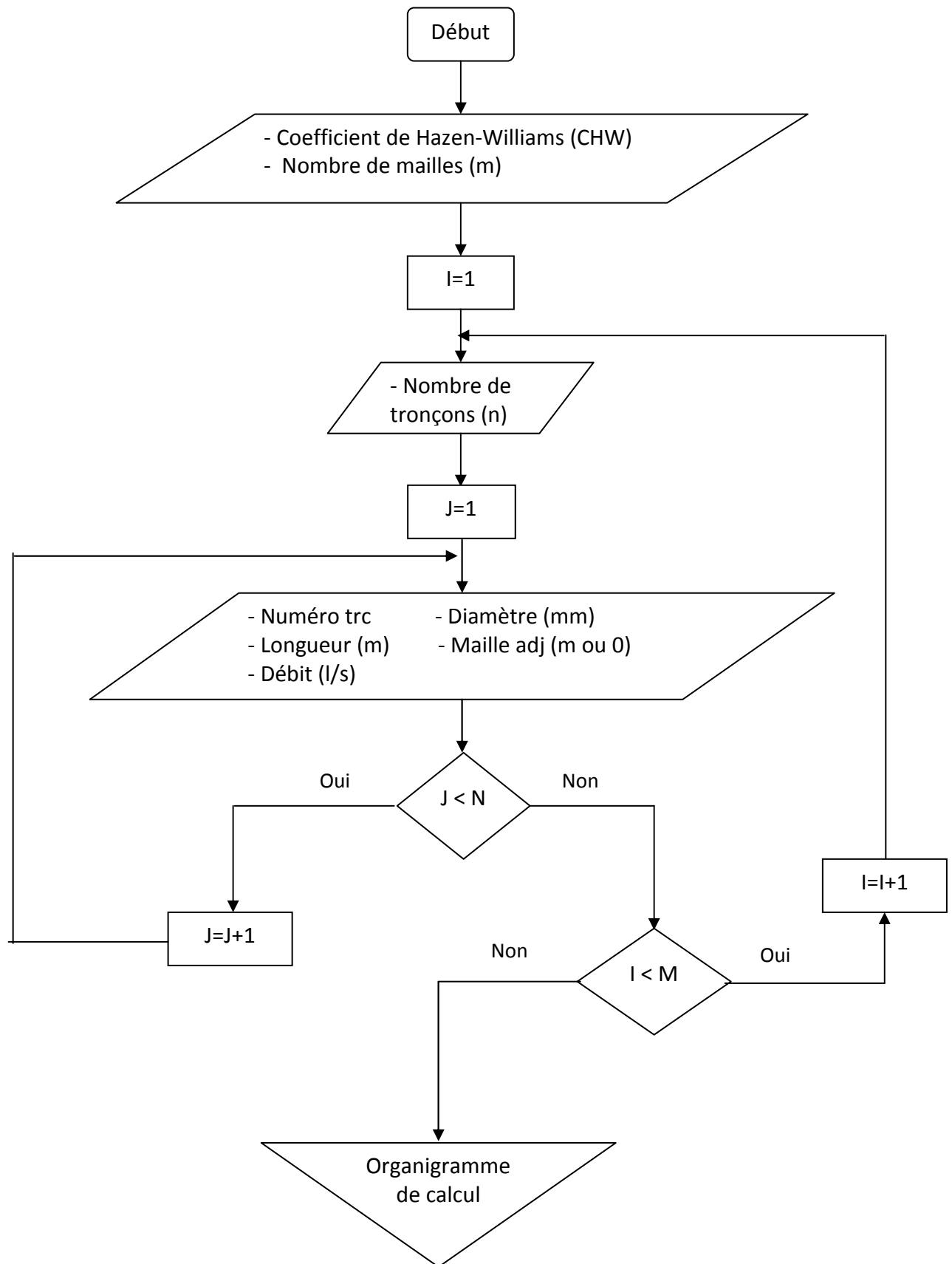
$$Q_{i,j}^{(k+1)} = Q_{i,j}^{(k)} + \Delta Q_j \quad (2.43)$$

Cette méthode d'approximations successives s'applique jusqu'à convergence où  $\Delta Q_j \approx 0$  suivant la précision désirée. Il est à remarquer alors le volume de calcul qu'entraîne la méthode de *Hardy-Cross*, surtout dans le cas des grands réseaux. Pour surmonter le calcul rébarbatif induit par la méthode, une transcription informatique est généralement nécessaire dans ces circonstances. Pour ainsi faire, en général trois modules :

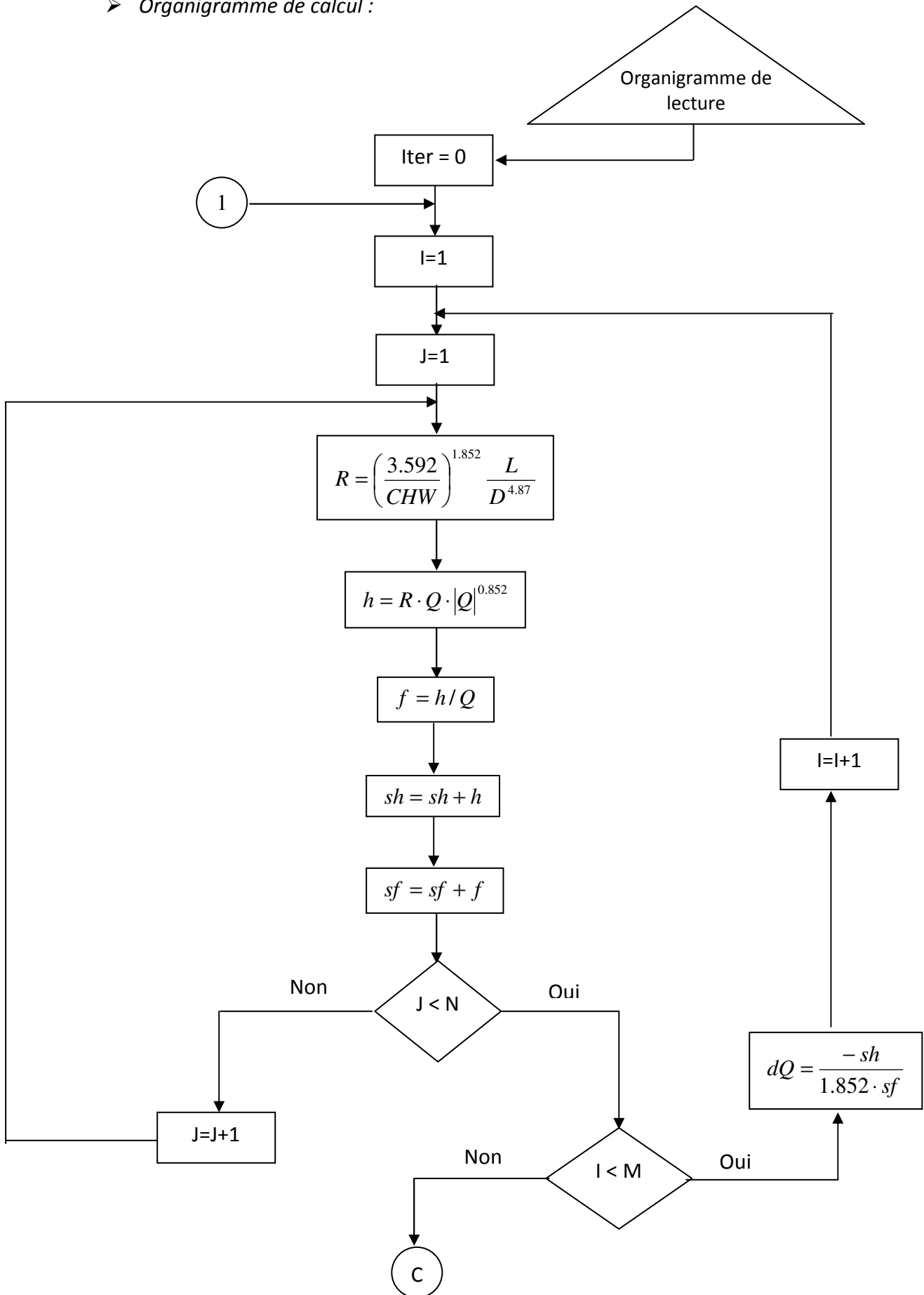
- module de lecture des données ;
- module des calculs ;
- module d'affichage des résultats.

On donnera ici les organigrammes détaillés (Figure 2.8) des trois modules à implémenter sur un compilateur de type *Fortran* ou *MatLab*.

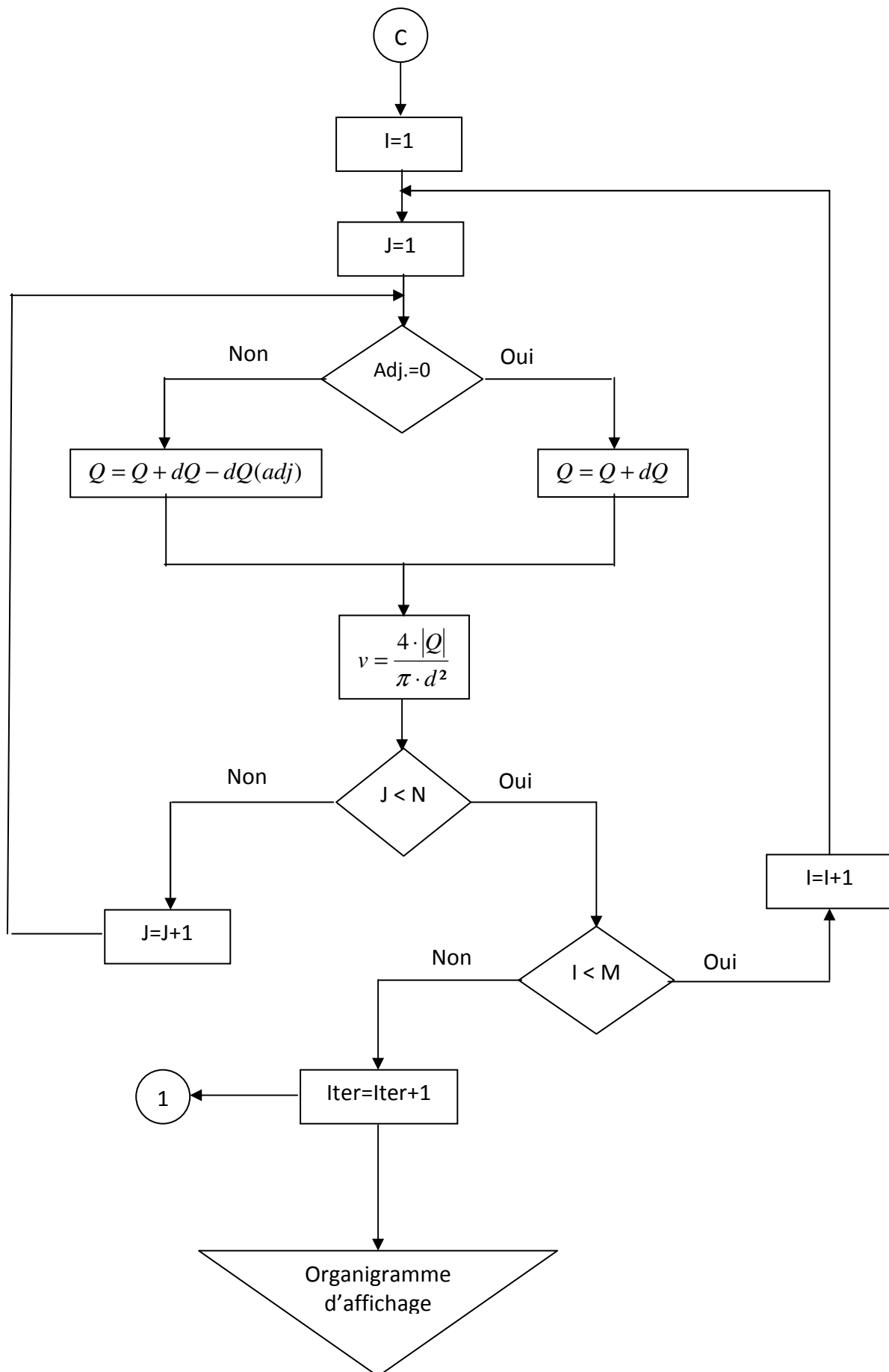
➤ *Organigramme de lecture des données*



➤ Organigramme de calcul :







➤ *Organigramme d'affichage :*

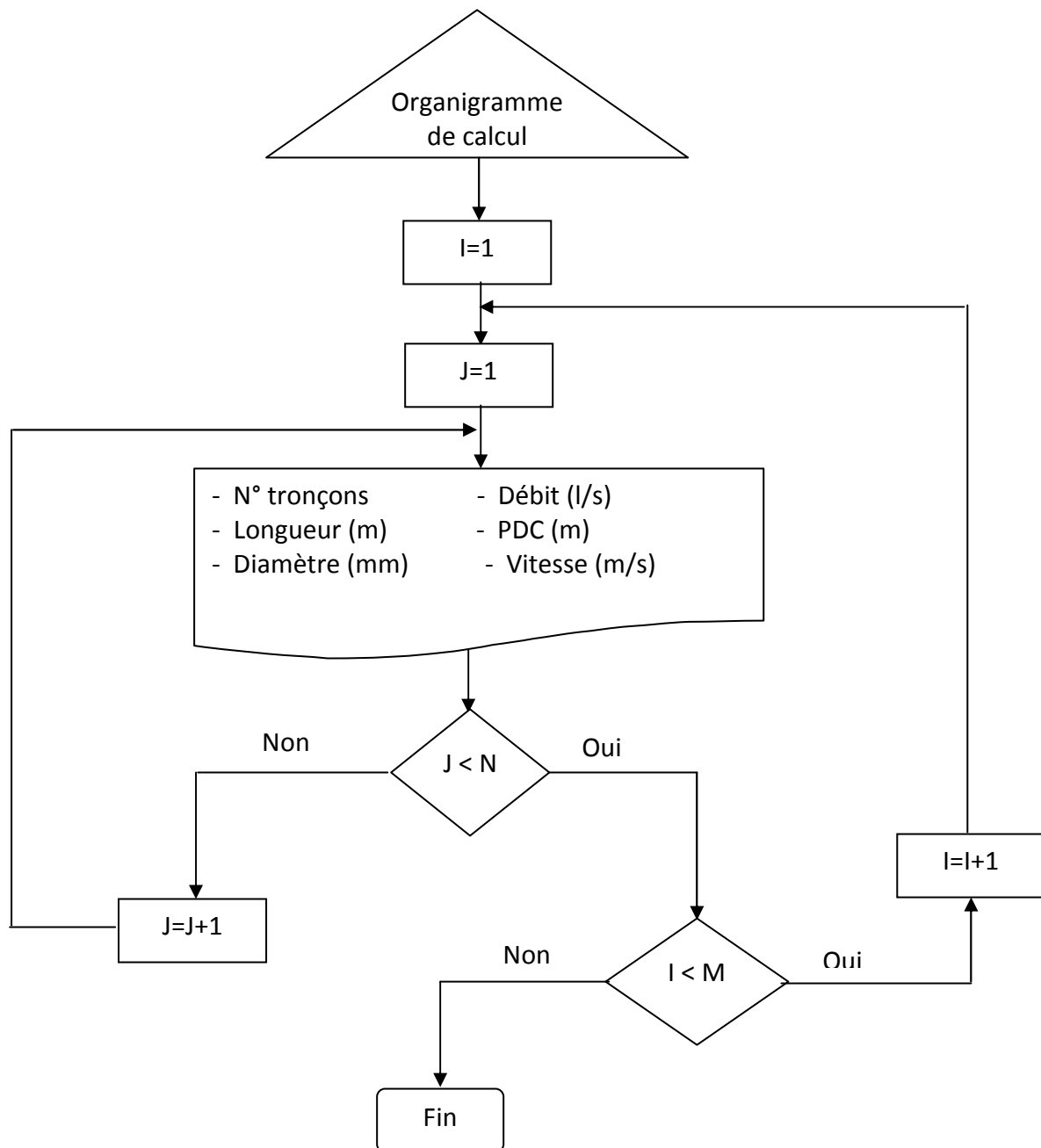


Figure 2. 8 Organigramme de la méthode de Hardy-Cross pour les réseaux maillés

Il est à noter les deux règles à observer, figurant dans l'organigramme de calcul, lors de la relaxation des débits du réseau maillé :

- 1) Si un tronçon n'appartient qu'à une maille, alors il ne subira que la correction  $\Delta Q$  propre à sa maille ;

- 2) Si ce tronçon fait partie de deux mailles contigües, celui-ci subira alors la correction de la première maille ainsi que celle de la seconde avec un signe opposé.

### 2.5.2. Méthode de linéarisation de *Wood-Charles*

Suite à l'avènement de l'outil informatique et son essor, le problème d'équilibrage des réseaux en charge a été repensé en décidant cette fois de l'attaquer de plein fouet par une approche matricielle permettant une correction simultanée dans toutes les conduites du réseau à la fois. C'est à cette période qu'est apparue la technique de *Wood-Charles* en 1976 et elle demeure à ce jour une méthode très puissante et forme l'algorithme de résolution de plusieurs logiciels commerciaux de calcul des réseaux. Outre sa convergence rapide, cette méthode, dite aussi « de linéarisation », possède le bon avantage de ne pas exiger une répartition initiale des débits.

Nous avons vu que les équations impliquées dans le calcul des réseaux étaient non-linéaires. En raison d'une solution directe impossible, celles-ci sont alors traitées par approximations successives jusqu'à convergence. Dans la méthode de *Newton-Raphson*, les termes non-linéaires sont développés en série de *Taylor*, retenant uniquement les termes linéaires, puis un système matricielle est résolu à chaque itération sur l'ensemble du réseau. Cependant, la méthode nécessite une répartition initiale des débits devant satisfaire la continuité aux nœuds. La linéarisation s'avère alors l'unique voie pour manier le problème. Cette idée fut alors adoptée en pensant cette fois à faire « transférer » une part de non linéarité de l'équation de dissipation  $RQ^n$  dans le terme de la résistance de la conduite  $R$ . C'est cette idée qui a été développée par Wood et Charles et elle est actuellement très répandue. Ainsi, les équations non-linéaires sont écrites sous la forme :

$$\sum_{j=1}^m \left( R_j |Q_j^{(k)}|^{n-1} \right) Q_j = 0 \quad (2.44)$$

Où  $R_j$  est la résistance constante de la conduite  $j$ ,  $Q_j^{(k)}$  le débit supposé dans la conduite à l'itération  $k$ , et  $Q_j$  le débit inconnu transité. L'équation (2.44) peut alors s'exprimer sous la forme linéaire suivante :

$$\sum_{j=1}^m \bar{K} Q_j = 0 \quad (2.45)$$

Tel que la résistance modifiée de la conduite considérée à l'itération  $k$  :

$$\overline{K} = R_j |Q_j^{(k)}|^{n-1} \quad (2.46)$$

Ainsi donc, les équations nodales des débits, jointes aux équations linéarisées des mailles forment un système linéaire d'équations à  $n$  inconnues, qu'il convient de résoudre à chaque itération par les techniques classiques de l'algèbre matricielle. Sa forme est de type :

$$[A_{i,j}] \cdot \{Q_j\} = \{f_i\} \quad (2.47)$$

Avec  $A_{i,j}$  la matrice d'incidence et coefficients de résistance modifiée des conduites, le vecteur  $Q_j$  des débits inconnus des branches du réseau et le vecteur  $f_i$  des sources et puits externes, formé par les entrées et sorties des nœuds ainsi que des potentiels de charge extérieurs.

Le point fort et distinctif de la méthode est qu'elle ne nécessite pas un choix initial des débits satisfaisant à un critère particulier (continuité par exemple). Une valeur arbitraire, par exemple unité ( $1 \text{ m}^3/\text{s}$ ), peut être affectée à toutes les conduites du réseau. Le calcul itératif absorbera vite les écarts et résidus dans les équations en questions.

Pour une meilleure convergence, il a été suggéré par les auteurs de la méthode de prendre la moyenne arithmétique de la valeur supposée à l'itération  $k$  et celle obtenue comme valeur à introduire pour l'itération suivante  $k+1$ . Ainsi, écrit-on :

$$Q_j^{(k+1)} = \frac{Q_j + Q_j^{(k)}}{2} \quad (2.48)$$

Pour s'assurer d'un système fermé d'équations non redondantes ou encore sous déterminé, on utilise une notion, issue de la théorie des graphes, que l'on appelle « nombre cyclomatique ou d'Euler » noté  $E$ . Elle stipule que pour un réseau interconnecté, tel un réseau d'eau sous pression, ce nombre s'écrit :

$$E = M + N - 1 \quad (2.49)$$

Où :  $M$  représente le nombre de mailles ou de boucle du réseau et  $N$  le nombre de nœuds. On peut ainsi former un système à  $N-1$  équations aux nœuds et  $M$  équations de mailles pour avoir  $E$  équations de débits inconnus.

## 2.6. Dimensionnement économique des réseaux

La première contrainte heurtant l'ingénieur, est quel est le dimensionnement adéquat pour que le réseau de distribution d'eau potable par exemple réponde aux exigences requises avec un moindre coût des ouvrages. Il s'agit donc de satisfaire le double critère technique et économique du réseau. Pour cela, il va falloir résoudre un problème d'optimisation.

Le problème consiste à satisfaire :

- les conditions hydrauliques ;
- minimiser la fonction coût.

### a) contraintes hydrauliques :

Pour chaque nœud :  $\sum Q_e = \sum Q_s$  (équation de continuité)

$$\sum J_i \leq H_{\min} \text{ (Satisfaction de la pression minimale)}$$

Pour chaque maille  $\sum J_j = 0$  (conservation d'énergie).

### b) Minimisation du coût :

En supposant que le prix des conduites en fonction du diamètre suit un modèle polynômiale de type :

$$C = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + ex \quad (2.50)$$

En prenant un exemple de prix des conduites pour différents diamètres, et après leur ajustement suivant une fonction polynômiale, on peut écrire alors :

$$C_i = 5 \cdot 10^{-9} d_i^4 - 3 \cdot 10^{-6} d_i^3 - 0,012 \cdot d_i^2 + 25,91 \cdot d_i \quad (2.51)$$

Pour simplifier la modélisation, on prend :

$$C_i = \gamma \cdot d_i^\beta \cdot L \quad (2.52)$$

Tel que  $1 < \beta < 1.5$ . Sachant que la formule des pertes de charge pouvant se mettre sous la forme :

$$J = \alpha \frac{Q^2}{d^5} \quad (2.53)$$

Ce qui donnerait pour la fonction coût :

$$C_i = \gamma \cdot \frac{Q^{\frac{2}{5}\beta}}{J^{\frac{1}{5}\beta}} L \quad (2.54)$$

Donc on aura à minimiser la fonction objective :

$$\min \sum C_i = \min \sum \gamma \frac{Q^{0.4\beta}}{J^{0.2\beta}} L \quad (2.55)$$

De ce fait la courbe de variation du coût en fonction de  $J/Q$  est une parabole de forme convexe (Figure 2.9).

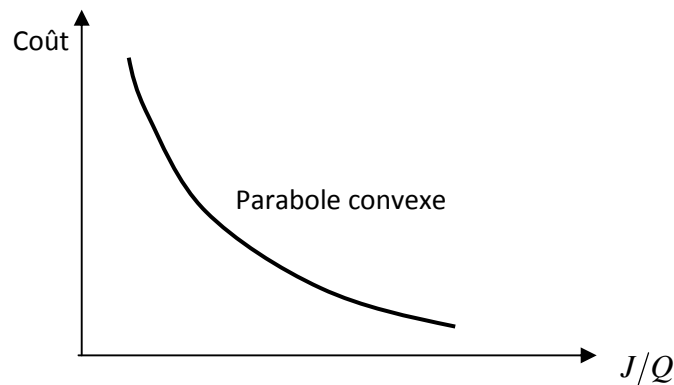


Figure 2. 9 Variation du coût en fonction de  $J/Q$

Si seul le coût des conduites est pris en considération, le modèle précédent ainsi formulé conduit au diamètre minimum véhiculant le débit  $Q$  à la vitesse maximale et par conséquent une grande perte de charge. Afin de satisfaire le critère de la pression minimale, charge assurée par une source de potentiel, tel qu'un château d'eau (donc sa hauteur) sera importante, ce qui n'est pas économique.

Pour optimiser donc sur l'ensemble du réseau, on est amené à créer une autre fonction permettant de contrebalancer la fonction objective des conduites. Cette fonction traduira le coût de construction (génie civil) lié à la hauteur du fût du réservoir (Figure 2.10). La fonction coût de la maçonnerie du fût (béton) sera :

$$C_B = S \cdot \delta \cdot H_F \cdot C \quad (2.56)$$

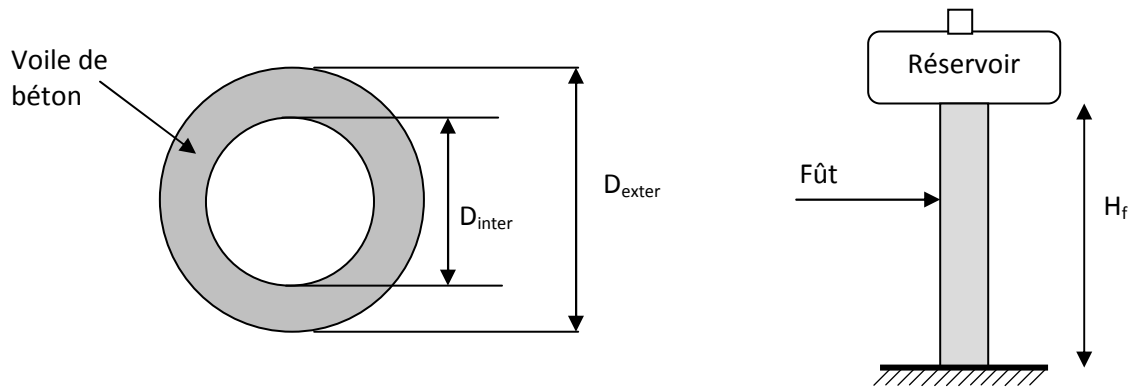


Figure 2. 10 Source de charge ponctuelle (Réserve d'eau surélevée)

Avec :

$S$  : Section du béton du fût ( $m^2$ ) ;

$\delta$  : Densité du béton armé ( $Kg/m^3$ ) ;

$H_f$  : Hauteur du fût nécessaire à la satisfaction de la pression minimale (m) ;

$C$  : Prix unitaire du béton armé.

Ainsi, la fonction objective totale de l'investissement à minimiser sera :

$$\min \sum C_i + C_B = \min \left\{ \sum \gamma \frac{Q^{0.4\beta}}{J^{0.2\beta}} L + (S \cdot H_f \cdot \delta \cdot C) \right\} \quad (2.57)$$

On remarque donc, qu'on est conduit à résoudre un problème de programmation non linéaire qui aura la solution de la forme représentée sur la figure (2.11) ci-dessous.

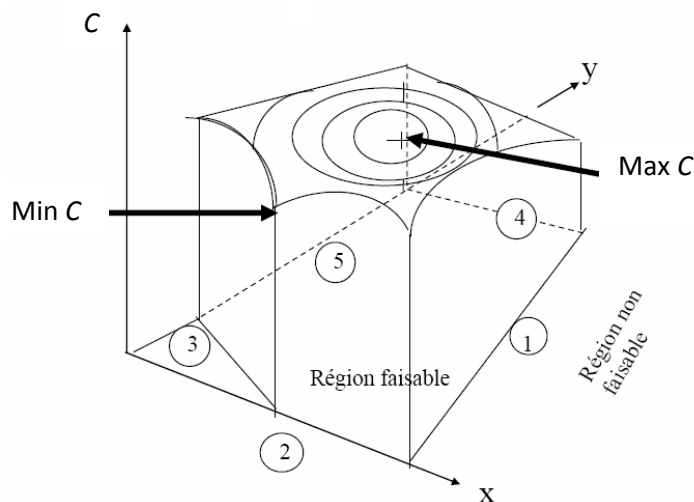


Figure 2. 11 Illustration du domaine de solution du problème d'optimisation non linéaire

La résolution du problème ainsi formulé est très complexe. Pour y parvenir, il faut réaliser un programme d'optimisation basé sur la méthode non linéaire, lequel sera accouplé à celui de l'équilibrage du réseau pour approcher la solution par approximations successives de la manière suivante :

1. à partir de la répartition initiale des débits, trouver les diamètres théoriques optimaux ;
2. normaliser les diamètres ainsi trouvés ;
3. Equilibrage du réseau par la méthode de *Hardy-Cross*, *Wood-Charles* ou autre, ce qui entraîne une nouvelle répartition des débits ;
4. Réinjecter ces nouveaux débits dans le programmes d'optimisation, et refaire les étapes précédentes jusqu'à ce que la variation des débits est minime. La solution obtenue sera la solution finale du problème.

## **2.7. Mesure du débit et vitesse dans les conduites en charge**

La technique de mesure classique et la plus précise de mesure du débit est celle de type volumétrique. Partant de la définition même du débit, on mesure alors le volume écoulé dans un certain temps au moyen de réservoirs étalons et de chronomètres. C'est la technique dite directe. Cependant, cette méthode n'est utilisable que pour des débits faibles. Elle demeure toutefois une méthode d'étalonnage des débitmètres industriels.

En pratique, on utilise des méthodes de mesure dites indirectes, surtout si le débit est important, que l'on peut classer come suit :

- mesure par différence de pression (organes déprimogènes) ;
- utilisation de l'effet Doppler (acoustique) ;
- utilisation de l'action d'un fluide sur un obstacle (rotamètres) ;
- utilisation d'un effet électromagnétique.

### **2.7.1. Les compteurs volumétriques**

Ils présentent par rapport aux autres débitmètres l'avantage de permettre une totalisation aisée des quantités de fluide qui les traversent. On les utilise donc essentiellement pour le comptage de consommation de fluide (tel que l'eau ou le gaz). Pour les liquides, on peut utiliser des pompes volumétriques à palettes ou à roues ovales fonctionnant en compteur (Figure 2.12). La précision est de l'ordre de 1 % si l'entretien est convenable.



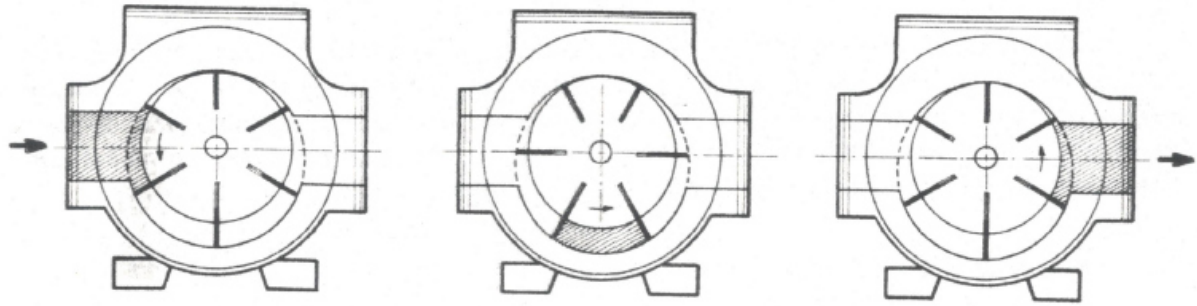


Figure 2. 12 Débitmètre volumétrique à palettes

La mesure d'un débit instantané à l'aide d'un tachymètre peut être transmise à distance ; on peut également effectuer le comptage à distance grâce à un compteur d'impulsions électriques ou pneumatiques.

### 2.7.2. Débitmètres déprimogènes

On peut utiliser la différence de pressions due à une variation de direction ou de valeur de la vitesse pour déterminer le débit volumique.

Différents modèles de débitmètres ont été construits et normalisés : diaphragmes, venturis et tuyères norme (X 10 101). Les normes spécifient les dimensions de l'organe déprimogène, la position des prises de pression, les contrôles à effectuer lors de la fabrication ainsi que les conditions amont et aval à respecter pour qu'une précision de l'ordre de 1 à 2 % puisse être garantie. L'application du théorème de *Bernoulli* permet d'obtenir une relation idéale entre le débit et la différence de pression créée par une contraction de l'écoulement :

$$Q_i = S_2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} \quad (2.58)$$

Où  $S_1$  et  $S_2$  étant respectivement la section de la conduite au droit de la prise de pression (1) et la section contractée de la conduite. L'étalonnage du débitmètre avec ses conduites amont et aval permet de déterminer le coefficient d'étalonnage qui dépend des caractéristiques géométriques du montage et du nombre de *Reynolds* tel que :

$$Q = \alpha Q_i \quad (2.59)$$

Avec  $\alpha$  le coefficient de débit. La figure (2.13) ci-dessous illustre le principe du débitmètre par organes déprimogènes.

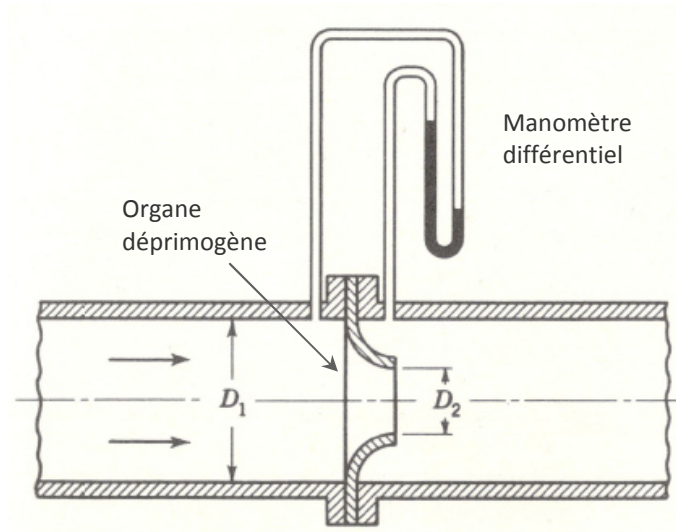


Figure 2. 13 Principe du débitmètre à organe déprimogène (type tuyère)

#### a) Diaphragmes

Il existe plusieurs types de diaphragmes normalisés qui diffèrent par la position des prises de pression et par conséquent par des solutions constructives particulières (Figure 2.14). Les relations donnant le coefficient de débit de ces diaphragmes sont plus ou moins complexes faisant intervenir différents paramètres. La formule générale du débit massique s'écrit :

$$Q = \alpha \varepsilon \psi \frac{\pi D_0^2}{4} \sqrt{2 \rho_1 \Delta p} \quad (2.60)$$

Dans laquelle  $D_0$  représente le diamètre de l'orifice en (m),  $\Delta p$  la pression différentielle en (N/m<sup>2</sup>),  $\rho_1$  la masse spécifique dans la section de prise amont en (kg/m<sup>3</sup>),  $\alpha$  coefficient de débit (déterminé expérimentalement) et  $\varepsilon$  coefficient de compressibilité sans dimension. Dans le cas d'un fluide incompressible (liquide)  $\varepsilon = 1$ .  $\psi$  coefficient de correction supplémentaire intervenant pour les diaphragmes à prise de pression dans les angles.

Ces divers coefficients sont donnés sous forme de tables, de graphiques ou de formules dans les normes (I.S.O. n°532).

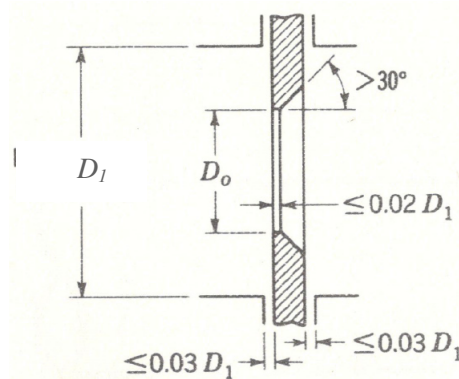


Figure 2. 14 Schéma d'un diaphragme normalisé à arêtes vives

Le grand avantage des diaphragmes dans la mesure du débit est leur facilité d'installation sur une conduite en charge. Néanmoins, on peut lui reprocher l'inconvénient d'une dissipation d'énergie occasionnée comparativement au tube *Venturi* ou à la tuyère.

#### b) *Venturi et Tuyères*

Ils présentent l'avantage d'une perte de charge résiduelle plus faible que celle d'un diaphragme mais ils nécessitent une place plus importante. Plusieurs modèles sont normalisés.

Les relations permettant le calcul de débit ont la même forme que pour les diaphragmes (norme X 10-101). Le coefficient de débit pour un *Venturi* (Figure 2.15) et la tuyère (Figure 2.16) et les autres coefficients peuvent être trouvés dans la littérature spécialisée ou les catalogues d'usage.

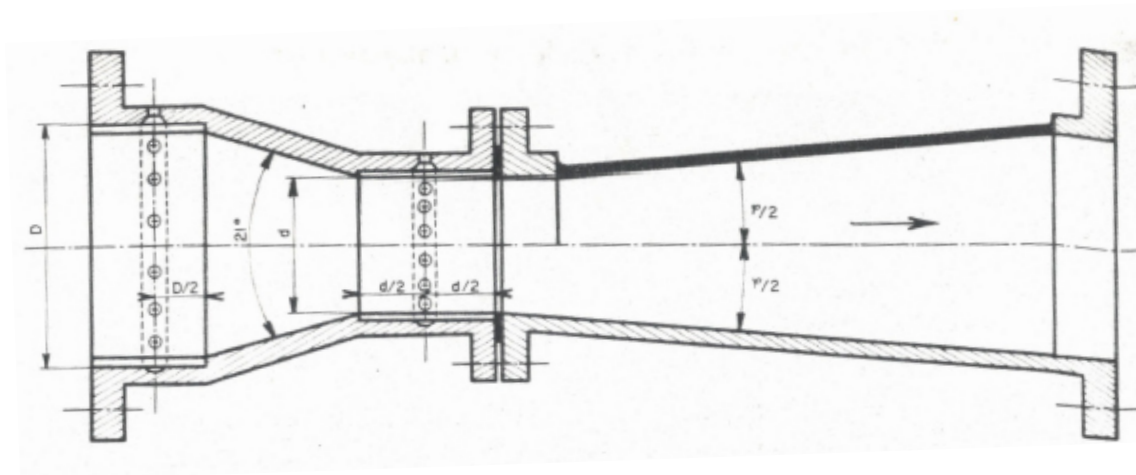


Figure 2. 15 Schéma d'un Venturi-mètre normalisé

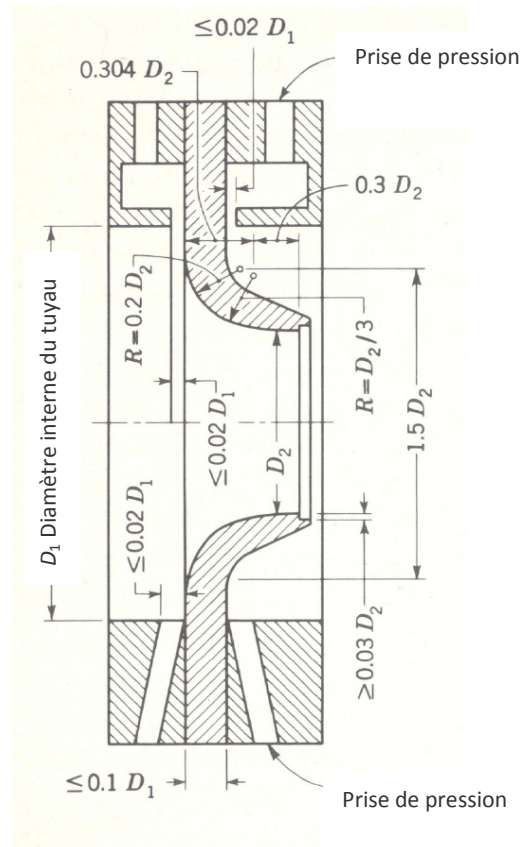


Figure 2. 16 Tuyère normalisée

### 2.7.3. Débitmètres à ultrasons

Les débitmètres ultrasoniques sont basés sur le principe de l'émission et la réflexion d'un signal sonore. Il est constitué par deux émetteurs qui dirigent les ondes sonores sous un certain angle d'un côté à l'autre de la canalisation, l'un dans la direction du courant, l'autre à contre courant. Le mouvement de l'eau accélère la propagation de l'un des signaux et ralentit l'autre. Le temps écoulé entre l'émission et la réception du signe, permet de mesurer la vitesse de l'écoulement.

### 2.7.4. Débitmètres électromagnétiques

Les débitmètres électromagnétiques sont fondés sur la mesure de la tension induite au sein d'un liquide qui traverse un champ magnétique. Les principaux organes de ces appareils sont : une unité sensible, capteur, et le dispositif de mesure et d'enregistrement, où s'opère la conversion de la tension induite en valeurs de débit et (ou) de volume.

Le mouvement d'un fluide conducteur dans un champ magnétique induit donc un champ électrique et un courant dont la mesure permet de déterminer le débit ou la vitesse du

fluide. On peut également, si la conductivité électrique est importante, mesurer le champ magnétique produit par ce courant induit. Ces deux types de débitmètres sont utilisés dans les métaux liquides, le plus fréquent étant celui basé sur la mesure de la tension du courant induit. Il est toutefois nécessaire de garantir une source d'alimentation électrique suffisante pour activer les inducteurs et alimenter le circuit de mesure et d'enregistrement.

#### **2.7.5. Débitmètres à turbines et rotamètres**

Les turbines et rotamètres utilisent l'action de l'écoulement sur un obstacle pour mesurer le débit. Les débitmètres à turbine ne se différencient des moulinets que par leurs dimensions qui sont égales à celles de la conduite alors que pour les moulinets on recherche une mesure locale avec une influence des parois la plus réduite. L'étalonnage permet de relier la vitesse de rotation au débit qui traverse la conduite.

La mesure de la vitesse de rotation se fait à l'aide d'un fréquencemètre sans contact avec le fluide dont on mesure le débit, il suffit de placer sur l'hélice une masselotte magnétique qui fait varier l'induction d'une bobine située dans la paroi.

Lorsqu'il est possible de placer le débitmètre dans un tronçon de circuit où l'écoulement est vertical ascendant, on peut utiliser un élément de tube conique en verre transparent ou bien en un matériau amagnétique conique dans lequel l'écoulement du fluide soulève un mobil, la section offerte à l'écoulement étant variable le niveau d'équilibre dépend du débit. Un étalonnage est nécessaire et permet de garantir une précision de 2 %.

## *Régimes transitoires en charge*

### **3.1. Introduction**

Un écoulement non permanent peut être défini comme état dans lequel les paramètres hydrauliques ou variables d'état du système  $(h, V, Q, P)$  varient en fonction du temps. Cet état d'instationnarité apparaît en général entre deux régimes permanents lorsque l'on modifie localement la pression ou le débit dans un système en charge par ajustement de l'état d'une vanne (ouverture ou fermeture), arrêt ou démarrage d'une pompe, ...etc.

C'est sous le vocable de "transitoires hydrauliques" qu'on regroupe l'ensemble des phénomènes rattachés à cet état de l'écoulement. L'étude de ces régimes instationnaires revêt une importance capitale en pratique dans la mesure où d'énormes dégâts matériels (désordres dans les stations de pompage et usine hydroélectrique) peuvent apparaître suite à des pressions excessives dans les conduites sous charge, cavitation et aplatissement en cas de très basse pression, ou même des ruptures par vibrations et résonance du système. Il faut ajouter à tous cela, les pertes de vie humaines qui en résulte dans certains cas.

La formulation et étude mathématique de ces écoulements transitoires dépend du modèle que l'on se fait ou l'on adopte pour décrire les variations de l'état hydraulique du système. Suivant le taux de variation des variables d'état de l'écoulement, noté  $F = [Q, P]^T$ , les phénomènes transitoires peuvent être décrits suivant ces trois catégories de modèles :

- **Modèle quasi-stationnaire** : dans lequel le taux de variation du débit (ou transfert de masse) est continu dans le temps, les termes d'inertie et les forces d'accélération sont cependant négligeables. Dans ce cas, l'équation du régime permanent peut être utilisée avec une précision acceptable pour ce type de modèle, et son couplage avec l'équation de continuité donne une équation différentielle de premier ordre dont la solution est la réponse dynamique du système hydraulique.

$$\frac{dF}{dt} = \varphi(F, t) \quad (3.1)$$

- **Modèle de la colonne rigide** : appelé aussi modèle de l'oscillation en masse, il prend en considération l'effet d'inertie du liquide. Les variations de la vitesse sont alors notables pour causer des forces d'accélération du liquide mais cependant demeurent faibles et insuffisantes pour invoquer la compressibilité de ce liquide en mouvement. Les effets d'élasticité des conduites et compressibilité du fluide sont alors négligés. L'exemple typique de cette classe d'écoulement est celui de l'oscillation d'un liquide dans un tube en U ou l'écoulement engendré par une pompe à piston. Le modèle mathématique issu de cette théorie est une équation différentielle de second ordre :

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \Gamma(\dot{F}, F, t) \quad (3.2)$$

La variable indépendante est le temps (t) uniquement car il est supposé implicitement que l'information sur l'état hydraulique du système en un point se fait ressentir instantanément dans l'ensemble des points du liquide. En conséquence la vitesse du signal (célérité des ondes) est infinie.

- **Modèle élastique** : désigné encore par "la théorie du coup de bélier" ou "ondes élastiques", c'est le modèle le plus complet des précédents dans la mesure où il tient compte de tous les effets physiques mis en jeu lors d'un écoulement transitoire. Sa fiabilité et la nécessité de son emploi apparaît dans le cas des écoulements où la variation du régime est aussi rapide et brusque que les effets de compressibilité du liquide et l'élasticité des parois de la conduite ne peuvent plus être négligés. L'information sur l'état hydraulique du système se propage alors par ondes dites

"élastique" dans l'ensemble du liquide avec une vitesse appelée "célérité des ondes". La variation du régime d'écoulement ici est alors du même ordre de grandeur que la période propre des ondes élastiques.

Les variables indépendantes sont là l'espace ( $x$ ) et le temps ( $t$ ), cadre de description du phénomène, le modèle mathématique est alors une équation aux dérivées partielles (EDP) de type hyperbolique :

$$\frac{\partial F^2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial F^2}{\partial x^2} \Leftrightarrow \square F = 0 \quad (3.3)$$

Avec :  $a$  célérité des ondes de pression et  $\square$  opérateur d'Alembertien.

Il faut noter que les autres modèles se présentent comme des cas particuliers du modèle élastique.

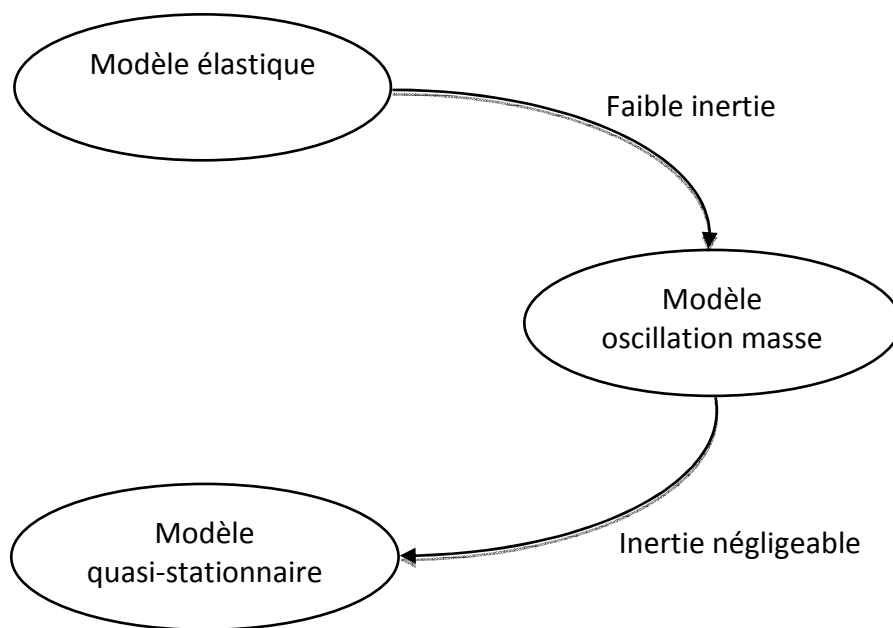


Figure 3.1 Modèles des régimes transitoires en charge

## 3.2. Ecoulements quasi-stationnaires

Nous examinerons respectivement le cas d'une vidange d'un bassin par une conduite ainsi que la vidange d'un réservoir vers un autre (transvasement entre deux réservoirs).

### 3.2.1. Vidange d'un bassin



Considérons un bassin ou réservoir de section finie dont le plan d'eau  $A(h)$  est une fonction de la hauteur  $h$ . Ce bassin se vidange par biais d'une conduite débouchant à l'atmosphère (Figure 3.2). Il est alors admis que la vidange engendre un abaissement du niveau d'eau suffisamment lent pour pouvoir négliger les effets d'inertie et appliquer ainsi l'approximation quasi-stationnaire de l'écoulement.

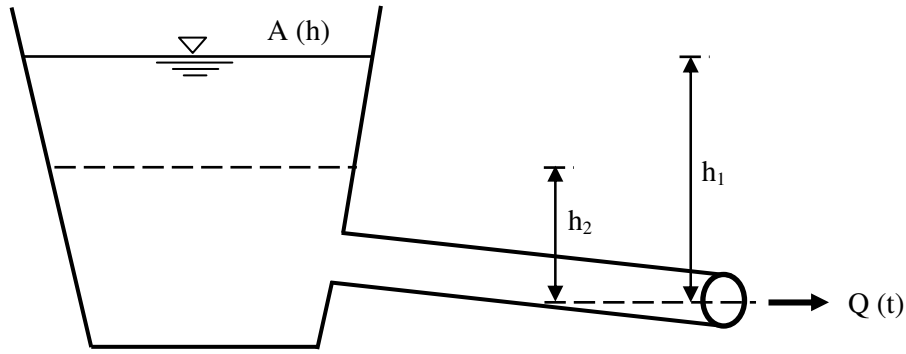


Figure 3.2 Vidange d'un réservoir de section quelconque

On écrira alors, en vertu du principe de continuité :

$$A(h) \left[ \frac{-dh}{dt} \right] = C_d S \sqrt{2gh} \quad (3.4)$$

Où :

$S$  : Section de la conduite

$C_d$  : Coefficient de débit de la conduite. Avec  $C_d = \sqrt{\frac{D}{\lambda L}}$  (sans PDC singulière)

Après réarrangement, on obtient le temps de vidange entre deux niveaux  $h_1$  et  $h_2$  :

$$t = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{A(h) h^{\frac{-1}{2}}}{C_d S \sqrt{2g}} dh = \int_{h_2}^{h_1} \frac{A(h)}{C_d S \sqrt{2g}} h^{\frac{-1}{2}} dh \quad (3.5)$$

L'intégration dépendra alors de la fonction  $A(h)$ . Si la section est prismatique  $A(h) = cte$  et  $C_d$  ne dépend pas de  $h$ , alors :

$$t = \int_{h_2}^{h_1} \frac{A}{C_d S \sqrt{2g}} h^{\frac{-1}{2}} dh = \frac{A}{C_d S \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} \frac{1}{\sqrt{h}} dh \Rightarrow t = \frac{2A(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{C_d S \sqrt{2g}} \quad (3.6)$$

Telle est la formule de calcul du temps de vidange partielle ou totale d'un réservoir.

### 3.2.2. Transvasement entre deux réservoirs

Soit un réservoir A de section constante interconnecté à un second réservoir B via une conduite de transit gravitaire. Le réservoir A reçoit un débit entrant  $Q_e$  alors que le réservoir B évacue un débit  $Q_2$  (Figure 3.3). Ces deux débits peuvent être variables dans le temps.

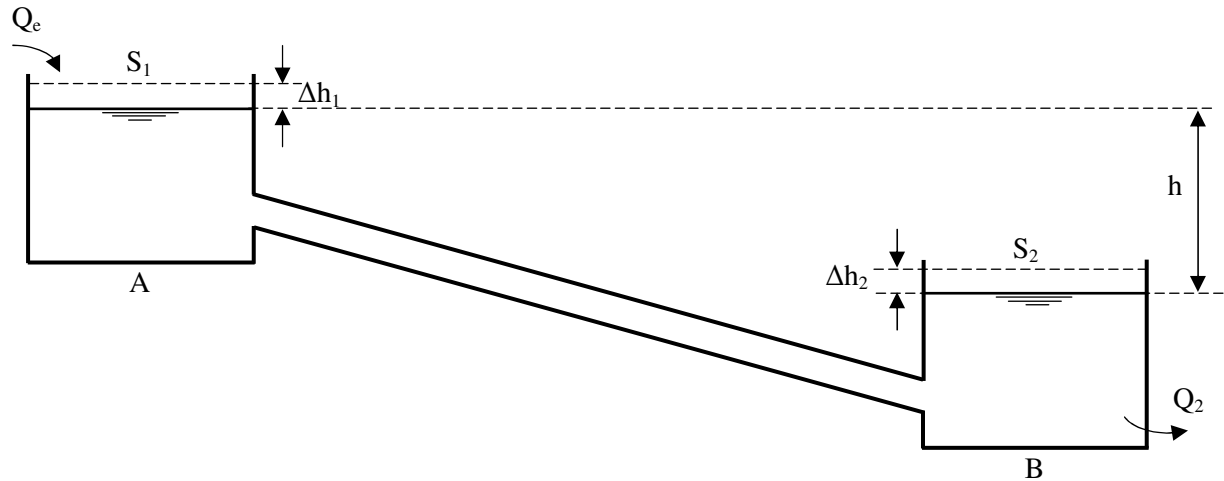


Figure 3.3 Problème de transvasement entre deux réservoirs

Dans le cas général, la charge motrice  $h$ , et le débit de ce fait, varie dans le temps. Comme il a été noté, cette variation est considérée suffisamment lente pour considérer l'état instationnaire comme une succession de régimes stationnaires sans effets inertiels induits.

Si nous notons par  $\Delta h_1$  la variation du niveau de la surface libre dans le réservoir A et  $\Delta h_2$  celui du plan d'eau dans le second réservoir B et ce durant un intervalle de temps fini  $\Delta t$ , alors le changement total :

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 \quad (3.7)$$

L'équation de continuité en A donne :

$$Q_e - Q_1 = S_1 \frac{\Delta h_1}{\Delta t} \quad (3.8)$$

La continuité au réservoir B impose :

$$Q_1 - Q_2 = S_2 \frac{\Delta h_2}{\Delta t} \quad (3.9)$$

Où  $Q_1$  est le débit dans la conduite et donc le débit sortant de A.

À partir de l'équation d'énergie, appliquée entre A et B, on écrit :

$$h = \left( k + \frac{\lambda L}{D} \right) \frac{Q_1^2}{2gS_c^2} \quad (3.10)$$

Avec,  $S_c$  section de la conduite et  $k$  coefficient de perte de charge singulière. De ce fait  $Q_1$  peut s'écrire comme suit :

$$Q_1 = C\sqrt{h} \quad (3.11)$$

Où :

$$C = S_c \sqrt{\frac{2g}{4 + \frac{\lambda L}{D}}} \quad (3.12)$$

La combinaison des équations de continuité en A et B, pour  $\Delta h$  donne :

$$\Delta h = \left( \frac{Q_e - Q_1}{S_1} - \frac{Q_1 - Q_2}{S_2} \right) \Delta t \quad (3.13)$$

Ou encore :

$$\Delta h = \left( \frac{Q_e}{S_1} - C\sqrt{h} \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) + \frac{Q_2}{S_2} \right) \Delta t \quad (3.14)$$

En faisant tendre vers zéro les différences finies  $\Delta t$  et  $\Delta h$ , nous obtenons :

$$dt = \frac{dh}{\left( \frac{Q_e}{S_1} + \frac{Q_2}{S_2} \right) - C\sqrt{h} \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right)} \quad (3.15)$$

L'intégration de cette équation différentielle donne le temps de transvasement entre deux niveaux des plans d'eau en A et B en fonction du débit entrant  $Q_e$  et des caractéristiques hydrauliques de l'installation.

### 3.3. Mouvements oscillatoires des liquides

Considérons un tube en U rempli d'un liquide jusqu'au niveau (O'-O'). Lorsque le niveau du plan libre dans l'un des deux côtés est écarté de sa position d'équilibre, alors un mouvement oscillatoire prend naissance dans le tube pour chercher la position d'équilibre (Figure 3.4). Trois cas se présentent alors pour l'étude de ces oscillations : liquide sans frottement, frottement laminaire et celui du frottement turbulent.

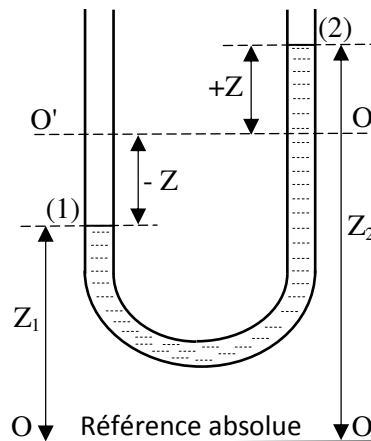


Figure 3.4 Oscillations d'un liquide dans un tube en U

### 3.3.1. Liquide sans frottement

Si l'on considère le cas dépourvu de tout frottement, l'équation dynamique d'Euler en régime instationnaire s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} + g \frac{\partial z}{\partial l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = 0 \quad (3.16)$$

Où  $l$  est la coordonnée curviligne le long du tube, l'intégration de cette équation entre les sections 1 et 2 pour un liquide incompressible :

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dl + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \quad (3.17)$$

Sachant que  $p_1 = p_2$  et  $v_1 = v_2$ , aussi  $\frac{\partial v}{\partial t}$  est indépendant de  $l$ , alors :

$$g(z_2 - z_1) = -L \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.18)$$

Avec  $L$  longueur totale de la colonne liquide. En changeant le plan de référence de (O-O) à celui de la position de l'équilibre (O'-O') :

$$g(z_2 - z_1) = 2gz \quad (3.19)$$

Etant donné que  $v$  est fonction du temps seulement,  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt}$  alors :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{-2g}{L}z \quad (3.20)$$

Ce qui donne :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2g}{L}z = 0 \quad (3.21)$$

C'est une équation différentielle de second ordre homogène linéaire dont la solution générale est de type :

$$z(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{2g}{L}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{2g}{L}}t \quad (3.22)$$

Dans laquelle  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration. La détermination de ces constantes se fait par la spécification des conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t=0) = z_{\max} \\ \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Il en résulte alors que  $C_1 = z_{\max}$  et  $C_2 = 0$ , par conséquent :

$$z(t) = z_{\max} \cos \sqrt{\frac{2g}{L}}t \quad (3.24)$$

Cette équation représente celle d'un mouvement harmonique simple (analogue à celle d'un pendule simple) de période  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$ . La vitesse du liquide dans le tube  $v$  est obtenue par différentiation de  $z$  par rapport à  $t$  ( $v = dz/dt$ ). La figure (3.5) ci-après illustre ces solutions.

Notons alors l'allure non-amortie du mouvement en raison de l'absence de toute perte énergétique, et le décalage de  $\pi/2$  entre variation du niveau du plan d'eau et sa vitesse.

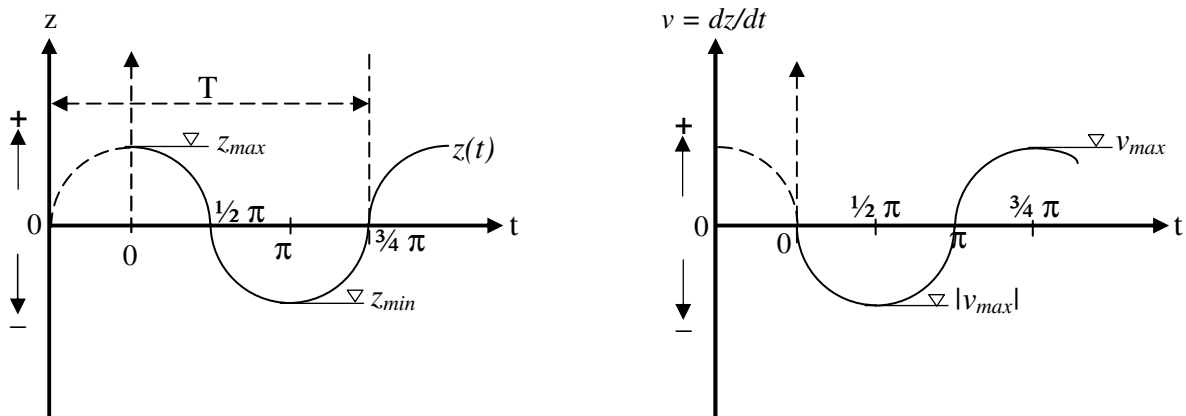


Figure 3.5 Allure de la solution du mouvement harmonique non amorti

### 3.3.2. Résistance laminaire

Quand un frottement de tension  $\tau_0$  se manifeste entre le liquide et les parois du tube alors le mouvement oscillatoire se trouve freiné et amorti en conséquence. La force de frottement sur une longueur élémentaire  $\delta l$  est donnée alors par :

$$F_t = \tau_0 \pi D \delta l \quad (3.25)$$

Avec,  $D$  diamètre du tube et  $\tau_0$  la contrainte tangentielle de frottement.

La force de frottement par unité de masse s'écrit donc :

$$\frac{\tau_0 \pi D \delta l}{\rho S \delta l} = \frac{4\tau_0}{\rho D} \quad (3.26)$$

L'équation dynamique, tenant compte de cette force dissipatrice devient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} + g \frac{\partial z}{\partial l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{4\tau_0}{\rho D} = 0 \quad (3.27)$$

Cette équation est valable pour tout type de résistance, aussi bien laminaire que turbulent. Reste-t-il seulement à admettre qu'en régime non permanent la détermination de cette résistance par friction est de même type que celle du régime stationnaire. Cette hypothèse admet que pour une vitesse donnée, la force de frottement est alors la même que ce soit en régime permanent ou en transitoire. A partir de la formule de Poiseuille, la contrainte tangentielle de frottement  $\tau_0$  aux points du tube est :

$$\tau_0 = \frac{8\mu v}{D} \quad (3.28)$$

La substitution de cette expression dans l'équation dynamique et après intégration entre les sections (1) et (2), nous obtenons :

$$g(z_2 - z_1) + L \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{32v}{D^2} L = 0 \quad (3.29)$$

Ayant  $2gz = g(z_2 - z_1)$  et  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt}$  et en notant  $v = \frac{dz}{dt}$ , il résulte :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{32v}{D^2} \frac{dz}{dt} + \frac{2g}{L} z = 0 \quad (3.30)$$

Avec  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  : viscosité cinématique du liquide ( $m^2/s$ ).

La solution générale de cette équation différentielle avec terme dissipatif est alors :

$$z(t) = C_1 e^{-mt} (e^{nt} - e^{-nt}) \quad (3.31)$$

$$\text{Où : } m = \frac{16\nu}{D^2} \text{ et } n = \sqrt{\left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2 - \frac{2g}{L}}$$

Cette solution est obtenue après prise en compte des conditions initiales à  $t = 0$ , à savoir  $z = 0, dz/dt = v_0$ .

Sachant par ailleurs que :

$$\frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2} = \sinh(nt) \quad (3.32)$$

La solution générale devient :

$$z(t) = 2C_1 e^{-mt} \sinh(nt) \quad (3.33)$$

Ainsi :

$$\frac{dz}{dt} = 2C_1 [-m e^{-mt} \sinh(nt) + n e^{-mt} \cosh(nt)] \quad (3.34)$$

À  $t = 0$  :

$$\frac{dz}{dt} = v_0 = 2C_1 n \quad (3.35)$$

Etant donné que  $\sinh(0) = 0$  et  $\cosh(0) = 1$ , alors :

$$z(t) = \frac{v_0}{n} e^{-mt} \sinh(nt) \quad (3.36)$$

Cette solution donne alors l'évolution du plan libre en fonction du temps à partir de  $z = 0$  à  $t = 0$  où la vitesse est  $v_0$ . La solution de ce mouvement est illustrée sur la figure (3.6) ici-bas pour le cas où  $m < n$ .

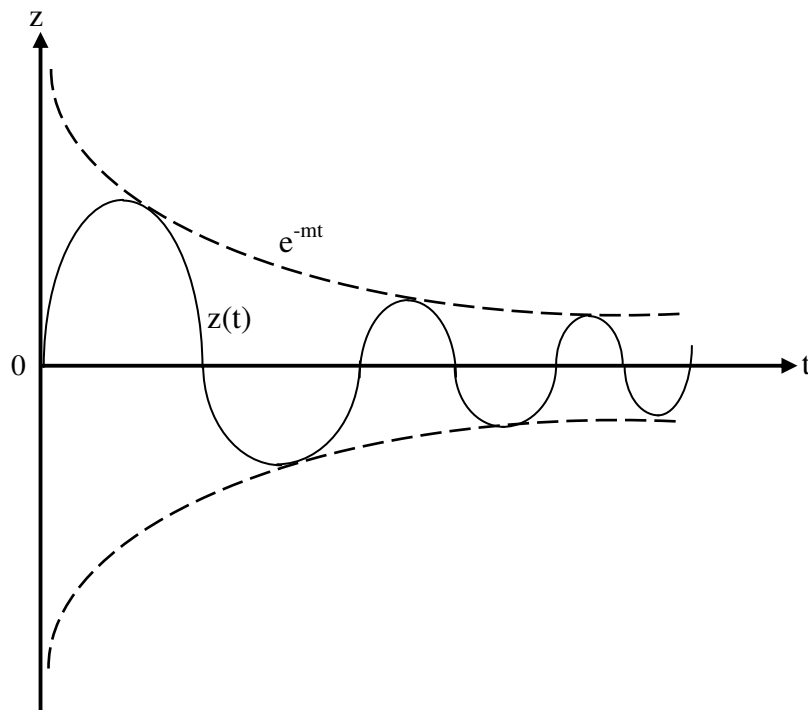


Figure 3.6 Solution du mouvement amorti

Il est alors à constater les oscillations d'allure amortie, entre deux enveloppes exponentielles, convergeant vers l'état d'équilibre.

### 3.3.3. Résistance turbulente

Dans la réalité pratique des oscillations dans les systèmes hydrauliques, la résistance est de type turbulente. L'hypothèse d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse d'écoulement est alors admise (avec  $\lambda = \text{Cst}$ ). L'usage de ce modèle de frottement dans l'équation dynamique donne :



$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} + g \frac{\partial z}{\partial l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{\lambda v^2}{2D} = 0 \quad (3.37)$$

L'intégration entre les sections (1) et (2) donne :

$$g(z_2 - z_1) + L \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\lambda v^2}{2D} L = 0 \quad (3.38)$$

Ou encore :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{2D} v |v| + \frac{2g}{L} z = 0 \quad (3.39)$$

La valeur absolue de  $v$  est recommandée dans ce cas pour tenir compte du sens d'écoulement dans le calcul des frottements. Expriment  $v = \frac{dz}{dt}$  on aura :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\lambda}{2D} \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| + \frac{2g}{L} z = 0 \quad (3.40)$$

Cette équation différentielle est alors non-linéaire et ne possède pas de solution générale. Un procédé d'intégration numérique est alors nécessaire dans ce cas. Cependant, un résultat intéressant est à noter si l'on considère un mouvement strictement décroissant (sens négatif de  $z$ ), c'est-à-dire en phase de descente. L'équation précédente devient :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{\lambda}{2D} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{2g}{L} z = 0 \quad (3.41)$$

En opérant par changement de variable  $B = \frac{dz}{dt}$  et au prix de quelques manipulations mathématiques d'intégration et de simplification, on aboutit à l'équation suivante :

$$\left( 1 + \frac{\lambda z_m}{D} \right) e^{\frac{-\lambda z_m}{D}} = \left( 1 + \frac{\lambda z_{m+1}}{D} \right) e^{\frac{-\lambda z_{m+1}}{D}} \quad (3.42)$$

Dans laquelle  $z_m$  et  $z_{m+1}$  sont les niveaux maximum successifs du plan d'eau dans le tube en descente et en montée. Cette équation nous permet alors de trouver, connaissant un extremum occurant à un certain moment, les pics successifs en phase de montée et celle de descente. Etant donné que cette formulation a été obtenue en admettant la phase de

descente dans l'équation différentielle du mouvement, alors  $z_m$  doit être positif et  $z_{m+1}$  sera alors négatif. Pour trouver  $z_{m+2}$ , la valeur de  $z_{m+1}$  doit être alors prise positive pour avoir ainsi une valeur  $z_{m+2}$  négative dans le second membre de l'équation, et ainsi de suite.

### 3.3.4. Oscillations entre deux réservoirs

Le mouvement oscillatoire entre deux réservoirs connectés par une conduite est décrit par la même équation que celle d'un tube en U, excepté pour les valeurs des coefficients des termes. Si  $z_1$  et  $z_2$  représentent les déplacements des plans d'eau dans les réservoirs autour de leur position d'équilibre, alors l'équation de continuité s'écrira :

$$z_1 A_1 = z_2 A_2 \quad (3.43)$$

Où  $A_1$  et  $A_2$  sont les surfaces des réservoirs respectivement en (1) et (2), supposées constantes dans ce cas.

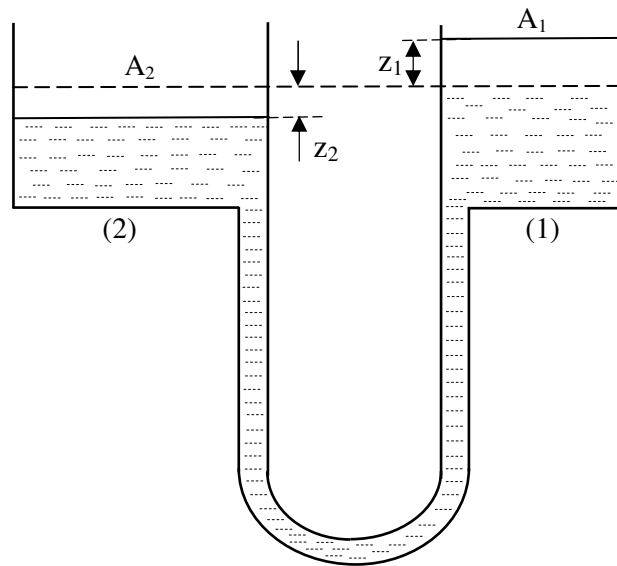


Figure 3.7 Oscillation entre deux réservoirs interconnectés

En prenant en compte les pertes de charge singulières dans le système comme longueur équivalente de conduite, l'équation différentielle du mouvement s'exprime comme suit :

$$\frac{\omega S L}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\omega S \lambda L_e}{2 g D} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 - \omega S (z_1 - z_2) \quad (3.44)$$

Pour  $z$  décroissant et après simplifications, il en résulte :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{\lambda}{2D} \frac{L_e}{L} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{gS}{L} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) z = 0 \quad (3.45)$$

Avec  $L_e$  longueur équivalente en conduite des pertes singulières en charge.

La différence de cette équation avec celle du tube en U réside alors dans les termes  $L_e/L$  et  $\left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right)$  présents ici pour tenir compte respectivement des pertes d'énergie aux singularités et l'effet capacitif des deux réservoirs. A noter aussi que la résolution de cette équation se fait par voie numérique par l'usage des algorithmes appropriés tels que la méthode de *Runge-Kutta* d'ordre 2 ou 4.

### 3.4. Régime transitoire – temps d'établissement d'un régime permanent

Le problème de détermination du temps nécessaire pour que l'écoulement devienne permanent dans une conduite suite à l'ouverture soudaine d'une vanne peut facilement être traité par la théorie de la colonne rigide.

La figure (3.8) ci-dessous montre une conduite en charge débouchant à partir d'un réservoir et déchargeant son débit à l'atmosphère par biais d'une vanne placée à son extrémité. Si l'on ouvre brusquement cette vanne, initialement fermée, le débit n'atteint pas sa valeur du régime stationnaire instantanément.

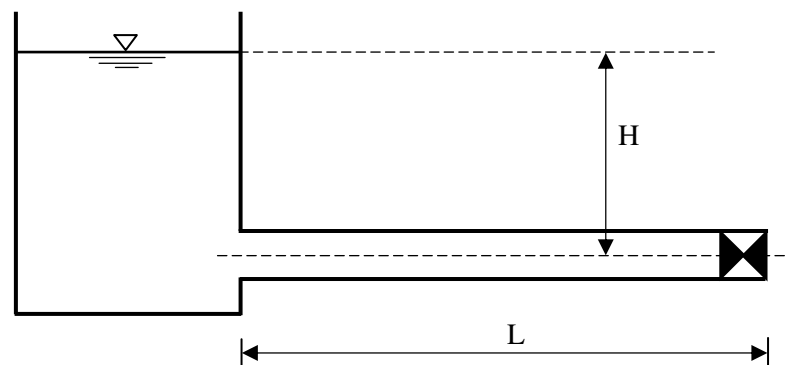


Figure 3.8 Ouverture instantanée d'une vanne sur conduite en charge

Initialement la charge motrice  $H$  disponible pour accélérer le liquide dans la conduite se voit absorbée par la perte de charge occasionnée par la vitesse croissante de l'écoulement. A

chaque instant la charge motrice alors disponible vaut :  $H - Kv^2$  où  $K$  est un facteur des pertes de charge :

$$K = \left( \frac{\lambda L}{D} + k \right) \frac{1}{2g} \quad (3.46)$$

Avec  $k$  coefficient de perte singulière de la charge. L'équation du mouvement s'écrit dans ce cas :

$$\rho S (H - Kv^2) = \rho S L \frac{dv}{dt} \quad (3.47)$$

Le temps  $T$  sera alors :

$$T = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{L}{g} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{(H - Kv^2)} \quad (3.48)$$

En admettant  $\lambda = Cst$  dans l'intervalle  $v_1$  et  $v_2$  et en notant  $H = a^2$  et  $K = b^2$ , l'équation précédente devient :

$$T = \frac{L}{g} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{a^2 - b^2 v^2} \quad (3.49)$$

Après intégration :

$$T = \frac{L}{2gab} \left[ \ln \left( \frac{a + bv}{a - bv} \right) \right]_{v_1}^{v_2} \quad (3.50)$$

Soit encore :

$$T = \frac{L}{2g\sqrt{KH}} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{H} + \sqrt{K}v}{\sqrt{H} - \sqrt{K}v} \right) \right]_{v_1}^{v_2} \quad (3.51)$$

Ainsi, le temps d'établissement du régime permanent est donné par l'équation (3.51) entre  $v = 0$  et  $v = v_0$  où  $v_0$  est la vitesse de l'écoulement en régime permanent sous la charge  $H$ .

Avec  $H = Kv_0^2$ , l'équation précédente devient finalement :

$$T = \frac{Lv_0}{2gH} \ln \left[ \frac{v_0 + v}{v_0 - v} \right]_{v=0}^{v_0} \quad (3.52)$$

Si la variation de  $\lambda$  est prise en considération durant la phase d'accélération du liquide, ce temps doit être obtenu par intégration numérique du fait qu'une intégration exacte analogue à la précédente ne peut avoir lieu.

### 3.5. Propagation des ondes élastiques – Phénomène du coup de bélier

Dans un réseau de conduites véhiculant un fluide sous pression, si l'on modifie localement les conditions d'écoulement, comme par exemple une mise en route ou arrêt d'une pompe, manœuvre d'une vanne,... etc., on introduit dans le fluide une discontinuité portant sur les paramètres de cet écoulement, à savoir la pression  $h$  et le débit  $Q$ , qui sont les variables d'état de ce système. En raison de l'élasticité du milieu (fluide et conduite), cette discontinuité ou perturbation dont l'amplitude peut être importante se propage de part et d'autre de ce point sous forme d'ondes, affectant ainsi rapidement une zone étendue de l'écoulement considéré.

En hydraulique, c'est sous le vocable de *coup de bélier* que l'on regroupe l'ensemble de ces phénomènes transitoires, désignant ainsi une variation brutale du régime d'écoulement et pouvant avoir des conséquences fâcheuses telles que la rupture de canalisations et la détérioration d'appareils traversés par le fluide. Il est donc capital de prévoir et d'étudier ces phénomènes transitoires afin de réduire leurs effets par l'utilisation de dispositifs spéciaux et le dimensionnement correct des différents composants d'une installation hydraulique.

#### 3.5.1. Causes fréquentes du coup de bélier

En ingénierie d'hydraulique, les causes fréquentes occasionnant des coups de bélier sont :

- l'ouverture ou la fermeture des vannes dans les conduites gravitaires en charge ;
- la mise en marche ou l'arrêt des pompes sur des conduites de refoulement ;
- vidange ou remplissage inadéquat de la conduite en charge ;
- implosion des poches d'air suite à une cavitation ;
- modification de la vitesse angulaire d'une pompe ;
- coupure électrique inopinée dans une station de pompage qui est la cause la plus fréquente du coup de bélier en hydraulique urbaine ;
- la mise en marche ou la modification de l'opération d'une turbine ;
- variation d'un plan d'eau relié à un réseau en charge ;
- vibration des accessoires de contrôle comme les vannes.

Cette liste est loin d'être exhaustive, et beaucoup d'autres situations complexes engendrent ce phénomène.

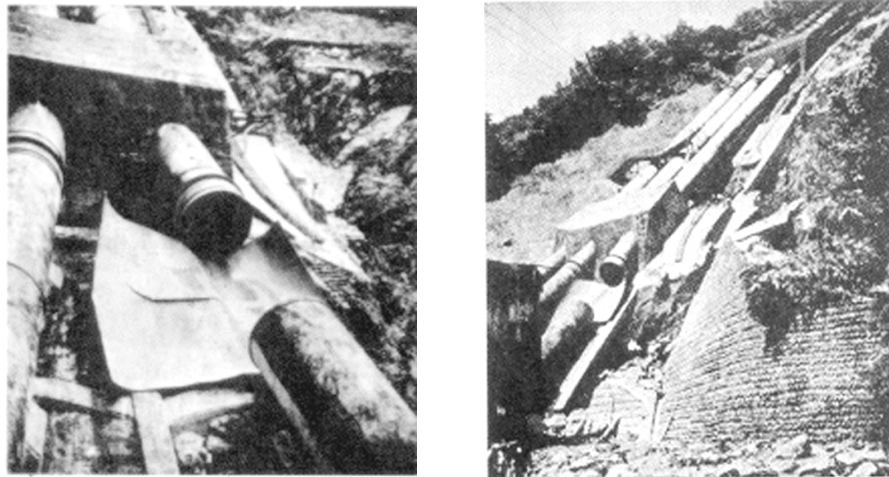
### 3.5.2. Risques et dommages conséquents aux coups de bélier

Potentiellement, le coup de bélier peut poser de graves conséquences pour les installations hydrauliques. Les risques et avaries causés par ce régime transitoire sont de plusieurs ordres, nous citons :

#### ❖ *Surpressions excessives :*

Conduit à des déformations permanentes ou la rupture des conduites ainsi que ses organes hydrauliques de contrôle, déboîtement de joints, fuites massives et désordres d'infrastructures. Ceci peut arriver si la pression totale, c'est-à-dire la pression en régime permanent majorée de la valeur de surpression due au coup de bélier dépasse la pression maximale admissible des canalisations.

A titre illustratif, les photos ci-après (Figure 3.9) représentent une rupture d'une conduite forcée.



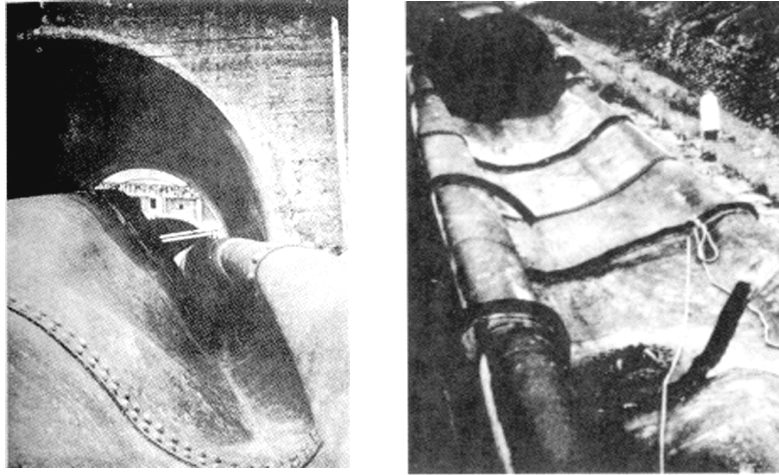
*Figure 3.9 Vue d'une conduite forcée éclatée de la centrale électrique d'Oigawa, au Japon (Chaudhry, 2014)*

#### ❖ *Très basse pression :*

Peut causer l'aplatissement des conduites et aspiration des joints, et contamination du fluide si en un point de la conduite la pression atteint le vide barométrique ( $-10$  m.c.e), alors une cavitation (libération de gaz dissous + vapeur d'eau) se produirait, ce qui donne lieu à une séparation de la veine liquide. En ayant un profil en long tourmenté, lors de la phase de surpression, la

poche de vapeur se résorbe engendrant une pression atteignant jusqu'à quatre fois la pression de service. Donc, c'est un risque à éviter à tout prix.

Les photos ci-dessous (Figure 3.10) illustrent le risque inhérent à ce cas dangereux.



*Figure 3.10 Vue d'une conduite aplatie due à un vacuum de la centrale électrique d'Oigawa, au Japon (Chaudhry, 2014)*

❖ **Inversion de l'écoulement :**

L'inversion du sens d'écoulement conduit à un fonctionnement en dévirage de la pompe, si cette dernière est démunie de clapet de retenue (comme c'est le cas de certaines grandes stations de pompage), causant ainsi des dégâts au groupe motopompe. Notons aussi que cette situation de fonctionnement entraînerait la vidange des réservoirs de stockage et d'accumulation.

❖ **Mouvements et vibration des conduites :**

A pour conséquence la surcharge et sollicitation dynamique des supports d'ancrage et butées conduisant par conséquent à la rupture de ces derniers et de la conduite elle-même. Ce phénomène se manifeste généralement quand la conduite entre en état de résonance.

### **3.5.3. Analyse physique du coup de bélier**

Dans ce qui suit, on va illustrer le processus de variation de la pression et la vitesse suite au phénomène du coup de bélier dans les deux cas distincts.

### a) Cas de l'arrêt brusque des pompes

En admettant la compressibilité du fluide et l'élasticité de la conduite et supposons aussi la colonne liquide constituée de tranches infiniment rapprochées. Au temps zéro, le débit  $Q_0$  se trouve brusquement arrêté par suite d'une disjonction, quatre phases peuvent alors être envisagées.

**1<sup>ère</sup> phase** : par suite de son inertie, la colonne liquide va poursuivre son ascension, mais n'étant plus alimentée, il va en résulter derrière elle une dépression ; l'eau se déprime. Chaque tranche considérée de la conduite se contracte successivement par diminution élastique du diamètre. Une onde de dépression prend alors naissance au départ de la pompe et se propage jusqu'au réservoir avec une célérité, désignée par «  $a$  ».

Si la distance entre la pompe et le réservoir est  $L$ , le temps mis par cette onde pour atteindre le réservoir est alors ' $L/a$ '. Au bout de ce temps, la conduite est en dépression sur toute sa longueur et l'eau est alors immobile.

**2<sup>ème</sup> phase** : par suite de son élasticité, la conduite reprend son diamètre primitif et, cela de proche en proche, en considérant des tranches successives à partir du réservoir. L'eau revient alors dans la conduite et au bout d'un nouveau temps ' $L/a$ ', c'est-à-dire ' $2L/a$ ' depuis l'origine du phénomène, toute l'eau est redescendue, mais va se trouver arrêtée par le clapet de la pompe, qui, entre temps s'est fermé.

**3<sup>ème</sup> phase** : en raison de cet arrêt, la première tranche en contact avec le clapet va se trouver comprimée, entraînant une dilatation de la conduite. Les tranches qui suivent vont subir le même sort avec les mêmes conséquences pour la conduite, l'onde de pression gagne de proche en proche, dans le sens pompe-réservoir, toute la canalisation. Au bout d'un nouveau temps ' $L/a$ ', c'est-à-dire ' $3L/a$ ' depuis l'origine, toute la conduite sera dilatée avec une eau surpressée immobile.

**4<sup>ème</sup> phase** : grâce à l'élasticité de la conduite, celle-ci agissant à la manière d'un ressort, reprend de proche en proche, à partir du réservoir et en allant vers la pompe, son diamètre primitif, les tranches d'eau successives reprenant leurs dimensions premières. Au bout d'un temps ' $L/a$ ', c'est-à-dire ' $4L/a$ ' depuis l'origine du phénomène, nous nous retrouvons dans la même situation qu'au moment de l'arrêt brusque de la pompe. La période du mouvement est donc ' $4L/a$ '. Le phénomène se produirait indéfiniment, s'il n'était pas amorti par les



pertes de charge résultant des frottements de l'eau. La figure (3.11) suivante illustre le cycle de propagation des ondes de surpression et dépression dans le cas d'une conduite de refoulement.

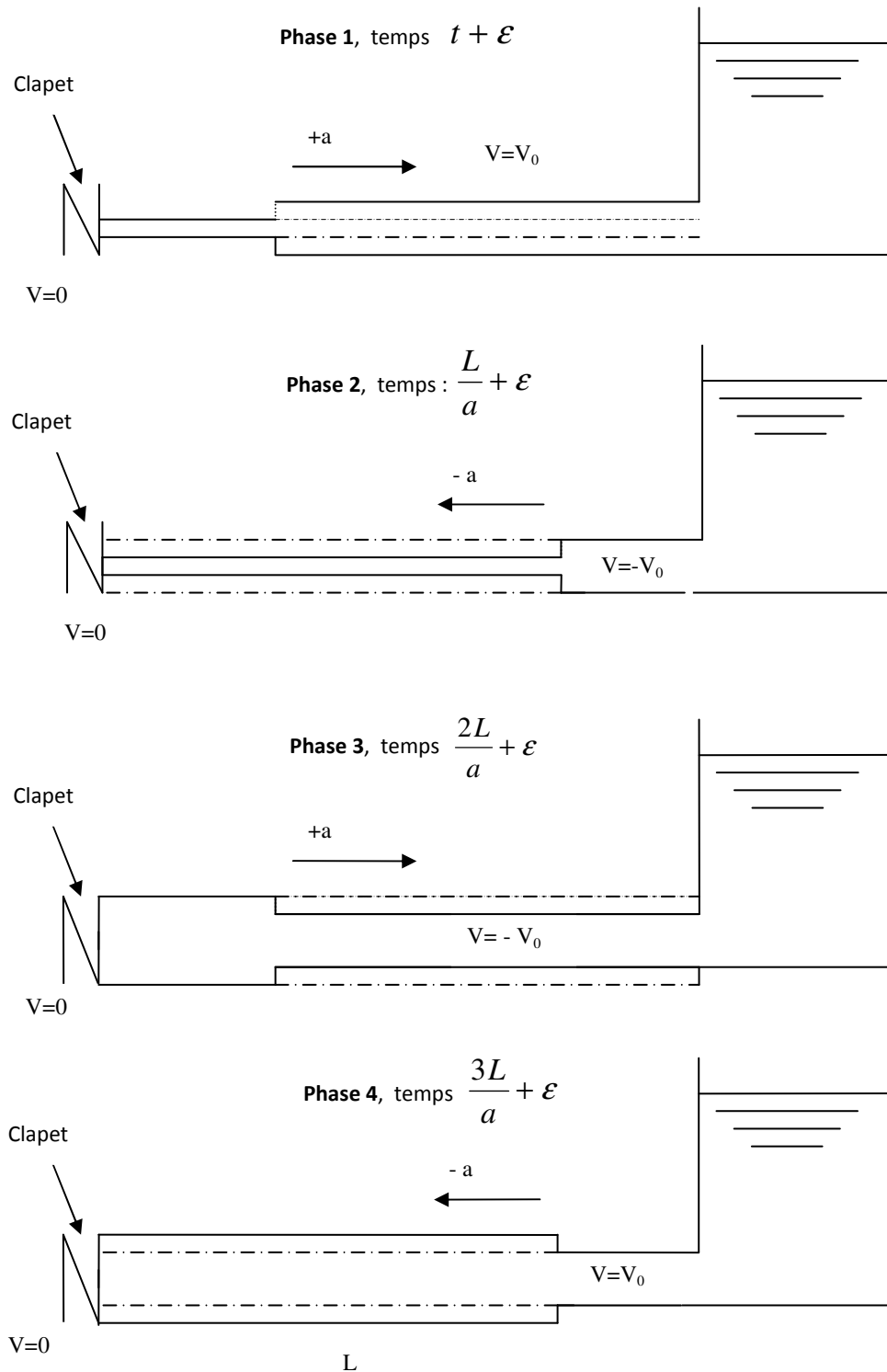


Figure 3.11 Cycle d'évolution du coup de bélier par ondes de choc

### **b) Cas de fermeture brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite**

Dans le cas de fermeture brusque d'une vanne placée en aval d'une conduite, la manœuvre de celle-ci à l'aval du système entraîne une surpression à son voisinage de la vanne semblable à celle observée à l'étape 3 du cas précédent. Le phénomène suit alors les étapes 4, 1, et 2.

Au bout du temps  $t = L/a$ , serait engendrée dans le réservoir une onde d'équilibre qui se propagerait jusqu'à la vanne, où elle arriverait dans le temps  $t = 2L/a$  (Phase 4).

À ce moment-là prendrait naissance une onde de dépression, qui atteindrait le réservoir dans le temps  $t = 3L/a$  (phase 1), suivie d'une onde d'équilibre, qui attendrait la vanne dans le temps  $t = 4L/a$  semblable à la phase 2, et le phénomène recommencerait s'il n'y n'avait pas de frottement.

#### **Remarques :**

- Ces deux cas sont considérés dans le cas d'un arrêt ou d'une décélération, cependant, ils peuvent aussi être soumis à des départs ou accélérations plus ou moins rapides qui entraîneront des variations importantes de pression.
- Dans les exemples précédents, nous avons considéré que le fluide était parfaitement élastique quelque soit son état de contrainte. Cependant en situation réelle, le liquide se rompt en tension. Pour l'eau, une dépression de 10,33 m d'eau entraîne la formation d'une cavité où il subsiste une tension de vapeur saturante.

### **3.5.4. Valeurs numériques du coup de bélier**

Nous donnerons dans ce qui suit l'ordre de grandeur du coup de bélier résultant d'une manœuvre d'un robinet vanne au bout d'une conduite.

#### **a) Manœuvre rapide (Formule de JOUKOWSKY)**

Nous avons considéré, jusqu'à présent, une manœuvre instantanée, c'est-à-dire, d'une durée  $T = 0$ , ce qui est physiquement impossible. Dans la réalité, la variation du débit, provoquée par l'arrêt d'une pompe par exemple, se fait en un temps  $T \neq 0$  et des ondes élémentaires sont engendrées, au fur et à mesure que s'opère l'arrêt. Dans le cas d'une manœuvre rapide, le temps d'annulation du débit est inférieur au temps correspondant à l'allée et retour d'une onde élastique, il a été montré que dans ce cas la surpression  $\Delta h$  vaut

$$\Delta h = \pm \frac{a \cdot \Delta v}{g} \quad (3.53)$$

### b) Cas de la fermeture lente d'une vanne de sectionnement

Lors de la fermeture rapide de la vanne de sectionnement, la valeur maximale du coup de bélier était de :

$$\Delta h = \frac{a \cdot v_0}{g} \quad (3.54)$$

Avec :

- $v_0$  : vitesse moyenne de l'écoulement (m/s),
- $a$  : célérité des ondes (m/s),
- $g$  : accélération de la pesanteur ( $\text{m/s}^2$ ).

Considérons une conduite horizontale 'AB', de diamètre intérieur 'D' de longueur 'L', alimentée en 'A' par un réservoir à niveau constant (Figure 3.12).

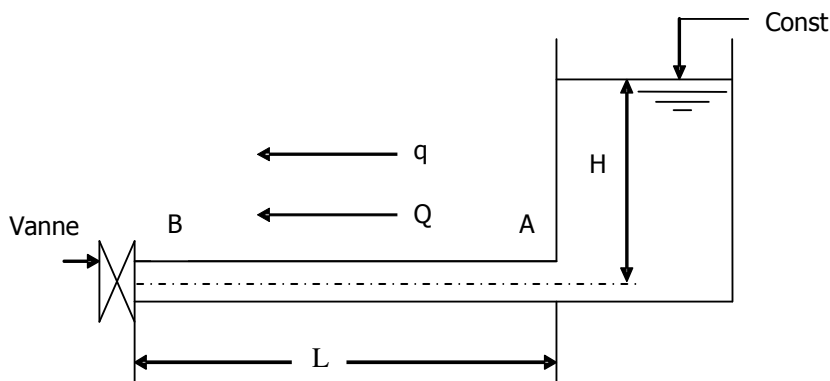


Figure 3.12 Fermeture lente d'une vanne de sectionnement

Soit ' $Q_0$ ' le débit au temps ' $t=0$ ' et supposons qu'il passe encore après un temps  $\frac{2L}{a}$ , un débit ' $q$ '. La valeur de la surpression et de la dépression due au coup de bélier est :

$$b = \frac{a}{gS} (Q_0 - q) \quad (3.55)$$

Où,  $S$  : section de la conduite ( $\text{m}^2$ ).

Supposons que le temps de fermeture de la vanne soit  $T = n \frac{2L}{a}$  et que pendant ce temps le débit varie linéairement.

Nous avons :

$$Q_0 - q = \frac{Q_0}{n} \quad (3.56)$$

$$Q_0 - q = Q_0 \frac{2L}{aT} \quad (3.57)$$

Donc :

$$b = \frac{a}{gS} Q_0 \frac{2L}{aT} = \frac{2LQ_0}{gST} \quad (3.58)$$

Finalement, on obtient la formule dite de *Michaud* :

$$b = \frac{2Lv_0}{gT} \quad (3.59)$$

Remarquons que si, dans la formule (3.59), on remplace  $T = \frac{2L}{a}$ , on retrouve la valeur du coup de bélier pour le cas de la fermeture brusque. Ainsi donc, on peut conclure que :

- Si  $T \leq 2L/a$ , le coup de bélier a pour valeur maximale :  $b = av_0 / g$
- Si  $T \geq 2L/a$ , le coup de bélier est moindre et a pour valeur maximale :  $b = \frac{2Lv_0}{gT}$

### c) Répartition du coup de bélier le long de la conduite

En cas d'arrêt brusque ( $T \leq \frac{2L}{a}$ ), le coup de bélier, maximal près de la pompe (cas de la conduite de refoulement), ou près du robinet de réglage d'extrémité (cas de la conduite d'adduction) conserve sa valeur maximale jusqu'à une distance égale à  $(L - \frac{at}{2})$ , puis décroît pour devenir nul à l'autre extrémité. En cas d'arrêt lent ( $T > \frac{2L}{a}$ ), le coup de bélier décroît linéairement depuis sa valeur maximale  $\frac{2Lv}{gT}$  jusqu'à zéro, à l'autre extrémité (Figure 3.13).

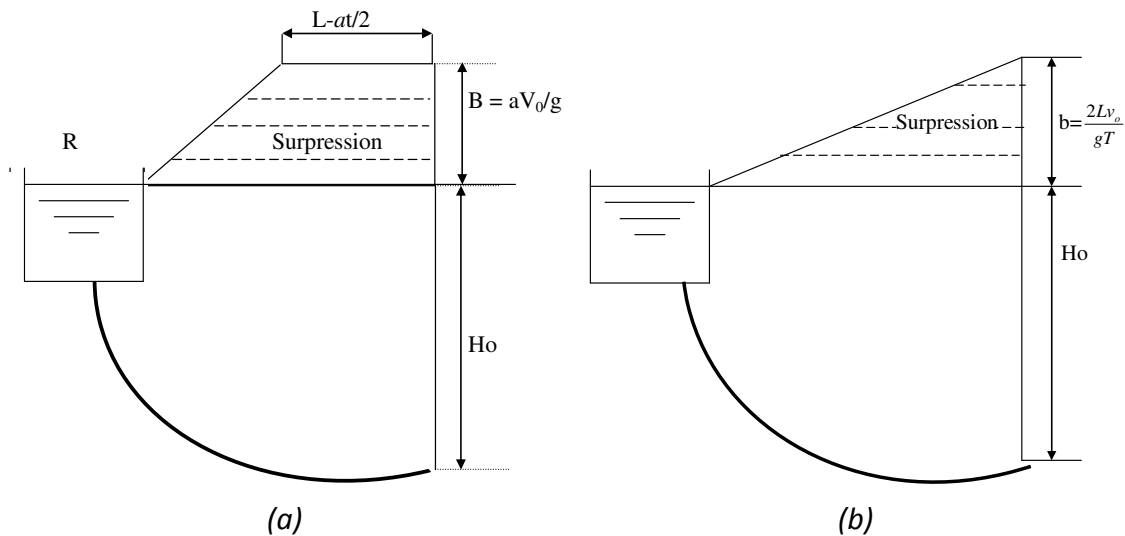


Figure 3.13 Répartition du coup de bélier : (a) fermeture rapide, (b) fermeture lente

### 3.5.5. Equations différentielles de base

Le modèle dit « élastique » correspond aux conditions physiques du régime transitoire dans lesquelles on considère les effets de déformation de la conduite et la compressibilité du fluide. Ce dernier est supposé se contracter et se dilater suivant les conditions isothermiques et caractérisé par son module de compressibilité, condition pouvant être considérée comme valide pour les liquides. Dans l'analyse des écoulements non permanents, l'équation dynamique et de continuité doivent être satisfaites dans le calcul de la pression (ou charge) et de la vitesse (ou débit) comme fonction de la position et du temps, à savoir  $H(x,t)$  et  $v(x,t)$ , suivant la description dite *Eulérienne*.

Les équations fondamentales invoquées ici reposent sur les hypothèses suivantes :

1. la conduite est considérée uniforme et l'écoulement est unidimensionnel ; la vitesse et la pression suivent une distribution uniforme à travers la section transversale de la conduite ;
2. la déformation de la conduite est linéairement proportionnelle à la contrainte (loi d'élasticité de *Hooke*) et l'effet de compressibilité du liquide est caractérisé par son module de compressibilité et la linéarité de comportement. Aucune interaction fluide-structure n'est prise en compte ;

3. le fluide est homogène et monophasique, donc aucune cavitation ou vaporisation du fluide n'apparaît durant le régime transitoire. Les équations ne seront valides pour un écoulement biphasique ou rupture de veine liquide ;
4. les formules des pertes de charge par frottement en régime stationnaire sont valides en régime transitoire (hypothèse de quasi-stationnarité) ;
5. aucun apport ou distribution latéral de débit n'est observé.

Ainsi, l'application du théorème des quantités de mouvement projetées sur une tranche liquide et le principe de continuité à cette même tranche, on aboutit au système d'équations différentielles, dit parfois de *Saint-Venant*, suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial x} - V \sin \theta + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \end{array} \right. \quad (3.60)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \end{array} \right. \quad (3.61)$$

L'équation de continuité (3.60), et celle de la dynamique (3.61) régissant la propagation des ondes élastiques dans les conduites en charge, constituent donc un système d'équations différentielles hyperbolique de premier ordre. Dans ce système, les variables indépendantes sont la coordonnée longitudinale  $x$  et le temps  $t$ , et les variables dépendantes sont la charge  $H$  et la vitesse  $v$ . Les autres variables, comme la célérité de l'onde  $a$ , le coefficient de frottement  $\lambda$  et le diamètre  $D$ , ne changent pas dans le temps mais peuvent évidemment varier selon  $x$ .

Dans la pratique des calculs du coup de bélier, le terme d'accélération convective  $v(\partial v / \partial x)$  peut être négligé devant  $(\partial v / \partial t)$ , ainsi que  $v(\partial H / \partial x)$  comparé à  $(\partial H / \partial t)$ . En considérant aussi la conduite horizontale ou faiblement inclinée (cas pratiques), le système différentiel simplifié s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \end{array} \right. \quad (3.62)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v |v|}{2D} = 0 \end{array} \right. \quad (3.63)$$

En écoulement stationnaire ( $\partial / \partial t = 0$ ), l'équation (3.62) indique que  $(\partial v / \partial x) = 0$ , ce qui correspond à un débit constant dans la conduite. L'équation (3.63) se simplifie en

$(\partial H / \partial x) = -j$  et impose que la pente de la ligne de charge soit égale à la pente de frottement. Dans cette équation (3.63), le modèle de *Darcy-Weisbach* a été utilisé pour le calcul de la perte de charge. Si par contre un autre modèle, empirique par exemple, a été employé, le terme de frottement dans (3.63) redeviendrait  $\lambda v |v|^m / D^b$  où  $m$  et  $b$  sont des coefficients empiriques dépendant de la formule ayant été utilisée.

### 3.5.6. Intégration du système différentiel

Il est bien connu que les équations complètes du régime transitoire sont insolubles analytiquement, et pour pouvoir intégrer ces équations différentielles, on doit passer par une cascade de simplifications. Après avoir négligé les termes convectifs, le système d'équations est rendu sous une forme conservative en omettant le terme dissipatif correspondant aux pertes de charge. On parvient alors au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (3.64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Dérivons à présent le système précédent successivement par rapport à  $x$  et à  $t$ . On obtient ainsi, après quelques manipulations algébriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad (3.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad (3.67)$$

On obtient donc les équations (3.66) et (3.67), dans lesquelles  $H$  et  $v$  sont liées aux variables  $x$  et  $t$  par une même équation différentielle qui est l'équation classique des « cordes vibrantes », bien connue aussi sous le nom de l'équation de *d'Alembert*, dont la solution générale de ce type d'équation a été donnée par ce dernier. La solution générale de ces équations différentielles s'obtient après un changement de variables et s'écrit :

$$H(x, t) = H_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (3.68)$$

$$v(x,t) = v_0 - \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (3.69)$$

Où  $H_0$  et  $v_0$  représentent respectivement la pression et la vitesse d'écoulement avant la rupture du régime permanent, c'est-à-dire à  $t = 0$  au point considéré de la conduite.

Les équations (3.68) et (3.69) sont celles trouvées par *Lorenzo Allievi* en 1912, où les fonctions arbitraires  $F$  et  $f$  peuvent être absolument quelconques et leur détermination dépend des conditions aux limites. Et pour un intérêt pratique, les  $x$  sont comptés positivement à partir de l'aval de la conduite où se crée la perturbation.

- **Interprétation physique des équations d'ALLIEVI**

L'examen de l'équation (3.68) montre que la fonction  $F(t - x/a)$  possède la dimension d'une hauteur de pression. Pour un instant donné  $t$ ,  $F(t - x/a)$  est fonction uniquement de l'abscisse  $x$ , et peut être représentée par conséquent par une certaine courbe quelconque  $mn$  (Figure 3.14).

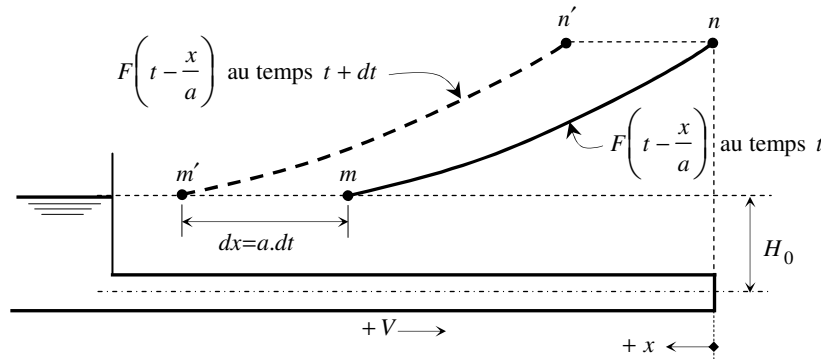


Figure 3.14 Signification physique de l'onde de pression  $F$

Après un certain temps  $t + dt$ , l'argument de la fonction  $F$  devient  $t + dt - \frac{x + dx}{a}$ .

Cependant, l'amplitude de  $F$  reste inchangée si pour un passage de  $t$  à  $t + dt$  l'abscisse  $x$  marque un accroissement d'une quantité  $dx$  égale à  $a*dt$ , dans lequel  $x = a*t + Cte$ . Ceci signifie que la courbe  $mn$  construite au temps  $t$  peut être reprise à l'instant  $t + dt$ , c'est-à-dire que la courbe  $mn$  subit une translation dans l'espace dans le sens positif de  $x$  par une distance  $dx = a*dt$  pour se trouver à  $x + dx$ , on aura alors la courbe  $m'n'$ . La fonction  $F(t - x/a)$  représente donc une onde de pression se déplaçant en sens inverse de l'écoulement avec une célérité  $a$ . Une explication physique similaire s'applique aussi pour la



fonction  $f(t + x/a)$  en imposant  $x = -a.t + Cte$ . Elle représente ainsi une onde de pression se déplaçant dans le sens de l'écoulement avec une célérité  $-a$ .

Les équations (1.20) et (1.21) traduisent ainsi qu'en régime varié dans des conduites :

- la surpression  $(H - H_0)$  en un lieu et un temps quelconque le long d'une conduite est égale à la somme des deux ondes de pression  $F$  et  $f$  qui se croisent à ce temps et en ce lieu en se déplaçant à la célérité  $+a$  et  $-a$  par rapport au fluide (Figure 3.15);

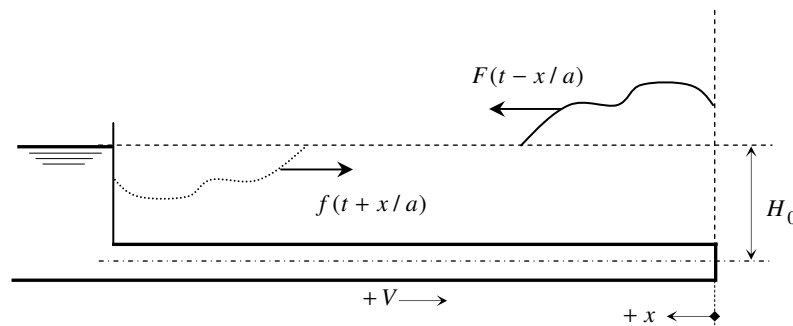


Figure 3.15 Concept de superposition des ondes  $F$  et  $f$

- l'accroissement des vitesses  $(v - v_0)$  au même lieu et au même temps est  $(\frac{g}{a})$  fois la différence des deux mêmes ondes de pression.

Remarquons au passage que pour un autre observateur imaginaire, stationnaire en un point  $x_a$ , il constatera que les deux fonctions  $F[t - (x/a)]$  et  $f[t + (x/a)]$  changent continuellement, et au lieu d'avoir seulement que deux variables  $H$  et  $V$ , il en aura deux en plus qui sont les fonctions  $F$  et  $f$ , ce qui complique mathématiquement le phénomène. Par contre si un observateur mobile se déplace avec les ondes  $F$  et  $f$ , il verra que ces fonctions restent constantes et gardent leur valeurs initiales au moment de l'apparition de la perturbation, et permet alors d'éliminer les variations des grandeurs  $F$  et  $f$ . Ainsi, la notion d'observateur mobile rend énormément service dans l'analyse du coup de béliet et constituera la base philosophique de la méthode révolutionnaire de Louis Bergeron (1948).

#### • Simplification des équations d'ALLIEVI

Dans la pratique (conduite de refoulement ou gravitaire), l'origine de la canalisation est un réservoir de grandes dimensions comparé à la conduite où règne une pression constante

(coup de bélier nul). En admettant que le réservoir est à  $x = L$  de l'origine du phénomène (vanne par exemple), on peut écrire que :

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right) = -F\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (3.70)$$

On voit donc que l'onde de retour  $f$  est constamment égale et opposée à l'onde incidente  $F$ , autrement dit, à l'extrémité de la conduite où il existe une surface libre de pression constante, les ondes se réfléchissent avec changement de signe comme a été signalé précédemment. A l'instant  $(t - L/a)$ , elle devient :

$$f(t) = -F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \quad (3.71)$$

On a donc, en considérant l'instant  $(t + x/a)$  :

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right) = -F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right) \quad (3.72)$$

Les équations d'Allievi deviennent :

$$H = H_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right) \quad (3.73)$$

$$V = V_0 - \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right) \right] \quad (3.74)$$

On remarque que l'onde  $f$  a disparu et le problème se résume à la seule détermination de l'onde  $F$ .

### 3.5.7. Célérité des ondes

L'expression de la célérité des ondes dans une conduite sous pression, siège d'une perturbation du régime, s'écrit comme suit :

$$a = \sqrt{\frac{K_e}{\rho \left(1 + \frac{K_e}{E} \psi\right)}} \quad (3.75)$$

Il résulte alors que cette célérité dépend parallèlement des caractéristiques du fluide ( $K_e, \rho$ ) et des propriétés élastiques de la conduite ( $E$ ) sans oublier les conditions de contraintes externes ( $\psi$ ). Ces propriétés élastiques englobent les dimensions de la conduite ( $D$ ),

épaisseur de l'enveloppe ( $e$ ) ainsi que le matériau de la canalisation. Les conditions externes traduisent le type de support et les degrés de liberté du mouvement de la conduite dans le sens longitudinal. Le module de compressibilité du fluide  $K_e$  quant à lui dépend conjointement de la température, la pression et la quantité de gaz non dissous.

Le facteur adimensionnel  $\psi$  s'exprime par :

$$\psi = \frac{E}{S} \frac{dS}{dP} \approx \frac{E}{S} \frac{\Delta S}{\Delta P} \quad (3.76)$$

La détermination de ce facteur ( $\psi$ ) doit être établit pour chaque type de conduite et de fixation externe, qui définissent par conséquent le mode de déformation de la conduite. Nous donnant à présent quelques valeurs de  $\psi$  pour les conditions répandues dans la pratique :

1. Conduite rigide : Dans ce cas  $\Delta S = 0$ , on aura alors :

$$\psi = 0 \quad (3.77)$$

La célérité prend alors sa valeur maximale qui est de  $1430 \text{ m/s}$ .

2. Conduite élastique à paroi mince : on dit que la conduite est à paroi mince lorsque  $D/e > 40$ . On distingue alors trois cas :

- a) Ancrée à ces deux extrémités :

$$\psi = \frac{D}{e} (1 - \nu^2) \quad (3.78)$$

Où  $\nu$  représente le coefficient de Poisson.

- b) Ancrée à l'extrémité amont sans joints d'expansion :

$$\psi = \frac{D}{e} \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right) \quad (3.79)$$

- c) Avec joints d'expansion :

$$\psi = \frac{D}{e} \quad (3.80)$$

3. Conduite élastique à paroi épaisse : ce sont des conduites dites spéciales et, comme le précédent type, trois cas se présentent :

**a)** Ancrage appliqué aux deux extrémités de la conduite :

$$\psi = 2(1 + \nu) + \frac{D}{e \left(1 + \frac{e}{D}\right)} (1 - \nu^2) \quad (3.81)$$

**b)** Ancrage appliqué à l'extrémité amont seulement :

$$\psi = 2(1 + \nu) + \frac{D}{e \left(1 + \frac{e}{D}\right)} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \quad (3.82)$$

**c)** Avec joints d'expansion sur toute la longueur de la conduite :

$$\psi = 2(1 + \nu) + \frac{D}{e \left(1 + \frac{e}{D}\right)} \quad (3.83)$$

D'autres types de conduites et de formules existent, que nous ne citerons pas ici, tel que les conduites composites (galerie en rocher revêtue, en béton armé,...etc.). Selon Meunier (1980), les écarts observés des célérités par rapport au cas classique d'une conduite mince sans influence de contrainte longitudinale sont négligeables, dans la mesure où cette influence d'allongement ne conduit à des augmentations importantes. Il en résulte alors, selon le même auteur, qu'on peut n'utiliser que les formules simplifiées de célérité calculée pour les conduites minces sans effet de contrainte longitudinale. La prise en compte théorique de ces facteurs complémentaires (allongement, épaisseur et nature composite du matériau) ne conduit pas à des écarts suffisamment importants pour qu'on les retienne, en absence d'expérimentation.

Pour les conduites industrielles et l'hypothèse d'un fluide monophasique, on propose alors une formule générale de calcul de la célérité des ondes dans les conduites en charge.

Pour l'eau, on a :  $K_e = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  et  $\rho = 10^3 \text{ Kg/m}^3$ . Il s'ensuit alors immédiatement, à partir de l'équation (3.75) que :

$$a = \frac{1430}{\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10^9}{E} \frac{D}{e}}} \quad (3.84)$$

Qu'on trouve aussi souvent sous la forme suivante :

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48.3 + k \frac{D}{e}}} \quad (3.85)$$

$k$  est un coefficient dépendant du matériaux de la conduite (fonction inverse du module d'élasticité  $E$ ), et prend généralement les valeurs suivantes :

- $k = 0.5$  pour l'acier et le fer.
- $k = 1$  pour la fonte.
- $k = 5$  pour le plomb.
- $k = 33$  pour le PVC.
- $k = 83$  pour le polyéthylène haute densité.

Dans les phénomènes d'oscillation en masse, l'erreur sur la célérité de l'onde n'a que peut d'influence.

### 3.5.8. Techniques d'analyse des régimes transitoires

L'analyse d'un écoulement en régime non permanent dans un système hydraulique en charge peut être menée principalement suivant deux voies :

**a) Domaine d'analyse temporel :** par intégration numérique directe des équations de base et ceci par biais de schémas numériques qui fournissent la solution discrète des variables d'état  $h$  et  $V$  dans divers points d'espace  $x$  et le temps  $t$ . L'analyse des régimes d'oscillation établis (périodiques) peut également être traitée dans ce domaine en imposant dans la simulation un état de fluctuation harmonique. Trois principales méthodes numériques se présentent ; la Méthode des Caractéristiques, la Méthodes des Différences Finies (schémas explicites ou implicites) et la Méthode aux Volumes Finis.

**b) Domaine d'analyse fréquentiel :** moyennant certaines opérations de transformations et linéarisation des équations de base et des conditions aux limites, une réponse fréquentielle du système est obtenue en imposant une fonction de forçage périodique par l'analyse de *Fourier* et le principe de superposition. Par une transformation inverse, on peut ainsi convertir les résultats dans le domaine temporel. Nous citons parmi autres, la méthode des impédances et la méthode des matrices de transfert.

Dans la pratique de calcul et simulation des coups de bélier, la première technique d'analyse reste la plus utilisée et préférée car aucune simplification ou linéarisation n'est introduite, à coté de sa facilité et sa puissance de modélisation des conditions aux limites (pompes,

vannes,...etc.) et des manœuvres pratiquées. Quant à la seconde technique, elle reste néanmoins un outil puissant pour l'analyse de certains cas comme l'auto-excitation et la résonance, les fréquences propres des réseaux et récemment pour la détection des fuites dans les conduites. Cependant, les développements mathématiques complexes pour sa mise en œuvre et la linéarisation des équations restent les principaux désavantages de cette technique.

### **3.6. Protection contre le coup de bélier**

Le fonctionnement en régime transitoire des installations hydrauliques peut provoquer des ruptures de conduites et des détériorations importantes des organes traversés comme cela a été vu précédemment. L'étude soignée des phénomènes transitoires permettra donc de parfaire le dimensionnement des installations hydrauliques et de concevoir des moyens de protections adaptées minimisant les effets néfastes des phénomènes transitoires.

En pratique, par exemple, la fermeture d'une vanne sur une conduite importante crée une onde de compression pouvant endommager potentiellement ladite conduite et ses accessoires si elle est manœuvrée brutalement. Il appartient donc à l'exploitant de pallier ce risque en évitant toute manœuvre brutale. Par contre, un risque qui échappe au contrôle est celui de l'arrêt des pompes sur une ligne de refoulement, suite à la disjonction du courant électrique. Si en phase de dépression des poches de cavitations sont à craindre en raison du risque d'aplatissement des conduites et aspiration des joints, au retour de l'eau un énorme risque de rupture des conduites se manifeste aussi suite à la surpression et la résorption des poches de vapeur d'eau, si aucune précaution n'est prise quant à la protection de l'installation contre ces ondes élastiques. Il convient à cet effet de protéger le système hydraulique au moyen de dispositifs qui ont pour rôle de maintenir la pression dans les conduites, entre un maximum et un minimum compatibles avec la résistance des installations.

On peut ainsi dire que le principal objectif des dispositifs de protection anti-bélier est alors de minimiser au maximum les variations brutales des débits dans les conduites et assurer ainsi des variations graduelles de manière à induire des répartitions aussi linéaires que possible des enveloppes des pressions, en évitant la formation de vacuum aux points hauts et les pressions excessives aux points bas (Figure 3.16).

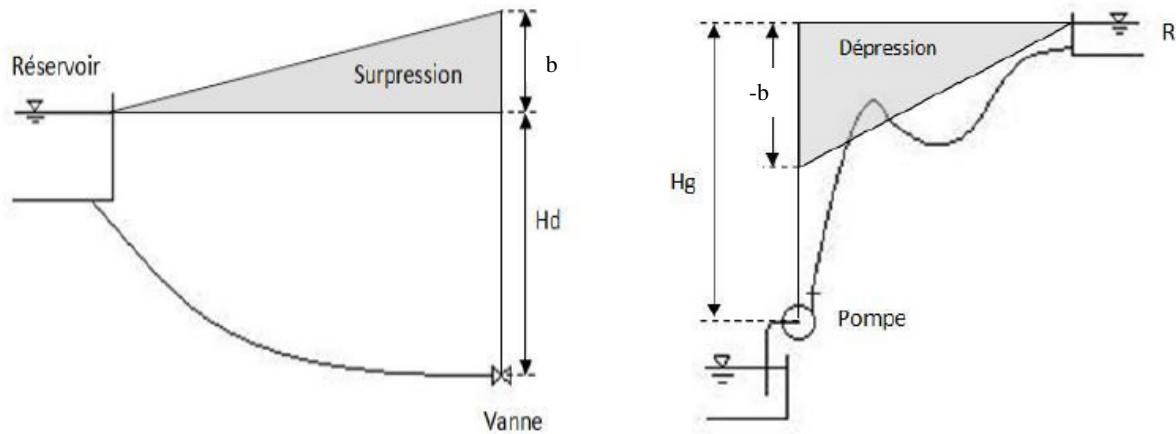


Figure 3.16 Enveloppe des pressions en régime transitoire en arrêt lent

Les dispositifs de protection doivent être installés à cet effet à l'aval des stations de pompage et à l'amont des vannes de régulation de conduites gravitaires où la variation de pression est importante. Sur les conduites de refoulement avec un profil accidenté présentant des points hauts, il peut s'avérer nécessaire dans certain cas de prévoir des dispositifs de protection combinés pour remédier à certains risques ponctuels en plus de la protection générale.

**Remarque :** Si le calcul de protection anti-bélier nécessite parfois une grande maîtrise (qui requiert parfois une haute compétence, tant sur le plan théorique que pratique), nous nous contenterons dans le présent cours d'exposer des généralités introductives à ce genre de conceptions pour montrer le mode de fonctionnement de chaque technique et organe de protection et éclairer ainsi l'esprit de l'étudiant tout en le conviant à pousser ses connaissances en se référant à la littérature spécialisée.

### 3.6.1. Protection basée sur des systèmes sans stockage d'énergie

#### a) Vanne de régulation

De la formule de *Michaud* (3.59) établie précédemment, on voit bien l'intérêt d'adopter une fermeture progressive de la vanne de régulation aval pour les conduites gravitaires. Ainsi, l'arrêt et le démarrage des pompes s'accompagnent généralement par une manœuvre lente sur la vanne de régulation placée en aval. Pour les installations importantes, la mise en marche des pompes s'effectue à vanne fermée.

L'ouverture de la vanne se fait progressivement jusqu'à atteindre le point de fonctionnement du réseau diminuant ainsi l'amplitude du coup de bélier qui en résulte. La fermeture progressive de la vanne doit aussi précéder tout arrêt de groupes de pompage.

### b) *Clapet by-pass*

Suite à une coupure d'alimentation électrique, l'arrêt des groupes de pompage ayant une faible inertie s'effectue brutalement provoquant de ce fait un coup de bélier dont il y a lieu de se prémunir. Ainsi, on peut songer à placer un by-pass entre l'aspiration et le refoulement de la pompe, muni d'un clapet fermé lorsque celle-ci fonctionne normalement. Au moment d'un arrêt de la pompe, la dépression dans la conduite provoque l'ouverture du clapet et se trouve ainsi limitée à la pression existant à l'aspiration. Le clapet interdit par contre le retour de l'eau (Figure 3.17).

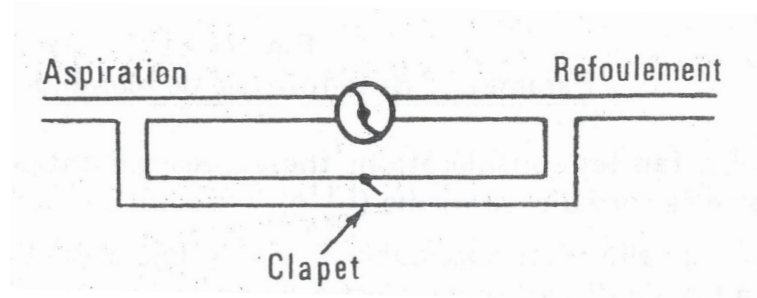


Figure 3.17 Principe d'une alimentation secondaire par by-pass

Ce système offre le grand avantage d'être simple et bon marché. Utilisé pour un surpresseur, il peut permettre à la fois la protection de la conduite amont et celle de la conduite aval.

### c) *Clapets d'entrée d'air*

Ils sont placés aux points hauts du profil de la conduite où le risque de formation d'un vacuum lors de la phase de dépression apparaît. Parfois associés à des ventouses, ils permettent alors l'entrée d'un certain débit d'air pour lutter contre les pressions relatives négatives (Figure 3.18)



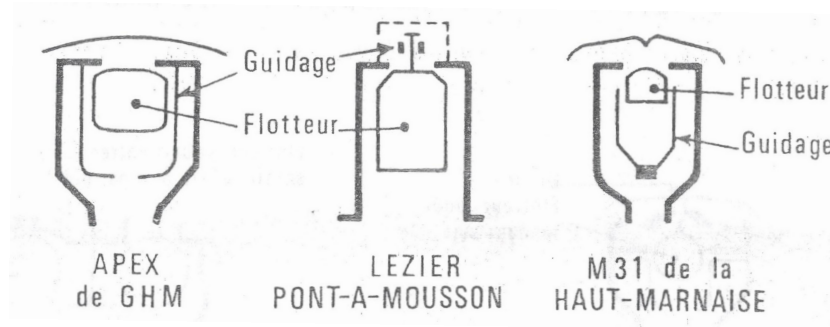


Figure 3.18 Schémas de ventouses à entrée et sortie d'air à gros débit (Meunier, 1980)

Il est nécessaire lors de l'étude de connaître le diamètre de la ventouse, ses coefficients de perte de charge à l'entrée et à la sortie ainsi que la cote de l'orifice par rapport à la génératrice supérieure de la conduite.

Les ventouses et entrées d'air n'ont pas un comportement linéaire en fonction du temps et de la pression : le début de l'ouverture se produit après l'apparition dans la conduite de l'onde de dépression, en tenant compte du déplacement des composants mécaniques et de la mise en débit. De plus, elles perdent leur étanchéité avec l'âge.

Ces équipements doivent être soumis à des contrôles réguliers au risque de mal protéger la conduite et ses installations du coup de bélier. L'étude et la confection de ces équipements doit être confiée à des spécialistes.

#### d) Soupapes de décharge

Elles font intervenir des composants mécaniques permettant d'éliminer localement les surpressions dépassant une valeur donnée dite pression de tarage. Ainsi, on peut dire que la soupape est un appareil hydromécanique qui écrête les surpressions en dérivant un certain débit d'eau à l'extérieur de la conduite dès que la pression dépasse une certaine valeur de réglage. Le volume d'eau libéré en cas de surpression peut être important. Comme pour les clapets d'entrée d'air, l'utilisation des soupapes nécessite un entretien régulier et un contrôle rigoureux (Figure 3.19).

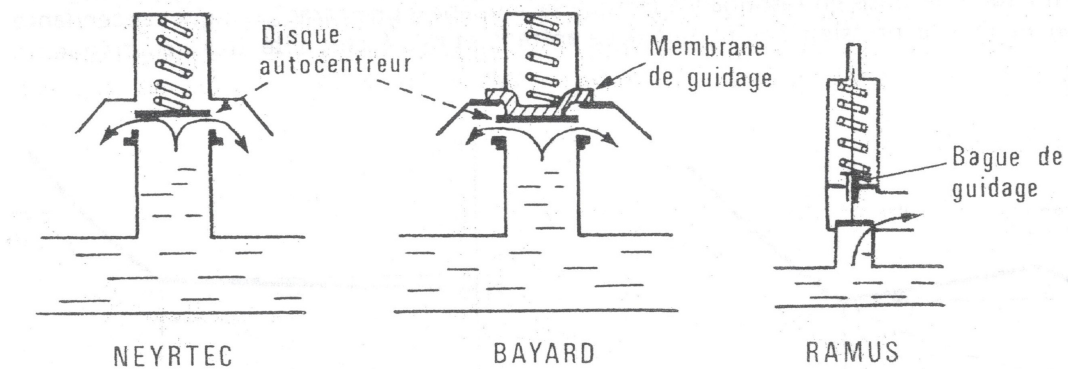


Figure 3.19 Schémas de fonctionnement de soupapes à ressort (Meunier, 1980)

### 3.6.2. Protection basée sur des systèmes avec accumulation d'énergie

#### a) Volant d'inertie

Le volant d'inertie est un des moyens qui permettent de prolonger artificiellement l'alimentation d'une conduite après disjonction du groupe de pompage. Etant une roue massive calée sur l'arbre du groupe, il restitue en ce cas l'énergie qu'il a accumulé et augmente le temps d'arrêt de la pompe. Pour une inertie fixée à priori, le calcul en régime transitoire permet de vérifier si la dépression obtenue en cas d'arrêt des groupes est acceptable. Le cas échéant quelques tâtonnements sont alors nécessaires pour le choix d'une bonne inertie (masse et sa répartition) du volant. Il est montré par ailleurs que le volant protège la conduite contre la dépression, limitant du même coup la surpression de retour. L'emploi du volant est généralement réservé à de petites installations. En effet, le calcul conduit très vite à des dimensions de volant très importantes, qui posent des problèmes d'exécution (tenue des paliers) et de fonctionnement (difficulté de démarrage des groupes de pompage du fait de l'inertie). Les abaques de *Lechapt* permettent le calcul de l'inertie nécessaire à la protection.

#### b) Cheminée d'équilibre

L'un des dispositifs classiques et anciens de protection contre le coup de bélier est bien celui de la cheminée d'équilibre. Cet organe de protection a connu de larges applications et développements dans les installations hydro-électriques. Appelé parfois chambre d'équilibre, il sert à protéger la galerie d'amenée des surpressions dues aux variations de régime de marche des turbines à travers les puits blindés (conduites forcées). Mais en

parallèle, la cheminée d'équilibre a trouvé emploi dans la protection des usines élévatoires d'eau pour palier aux effets nuisibles des surpressions et dépressions, surtout sur les points hauts du tracé des conduites. La cheminée d'équilibre est une réserve d'eau en contact permanent avec la conduite et dont la surface libre traduit exactement les variations de la pression du liquide. Elle doit donc avoir une section assez large pour combler la dépression sans se vider complètement et doit être assez haute pour ne pas déborder lorsqu'une surpression fait monter son niveau. La présence d'une cheminée modifie le mouvement transitoire engendré par une disjonction. Au lieu d'un mouvement oscillatoire de période  $4L/a$  caractéristique du coup de bélier d'onde, s'instaure un mouvement oscillatoire en masse de période plus grande :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{LA}{gS}} \quad (3.86)$$

Où  $L$  représente la longueur de la conduite,  $S$  sa section et  $A$  la section de la cheminée d'équilibre.

Les cheminées d'équilibre sont usuellement utilisées lorsque l'installation est constituée d'une longue canalisation ou d'un long chenal d'amenée à faible pente suivi d'une canalisation à forte pente terminée par un appareil de manœuvre susceptible d'engendrer des variations plus ou moins rapides de débits (Figure 3.20). C'est surtout pour la protection des usines hydroélectriques que sa théorie a été travaillée pour l'étude et dimensionnement de toutes les formes possibles de cheminées.

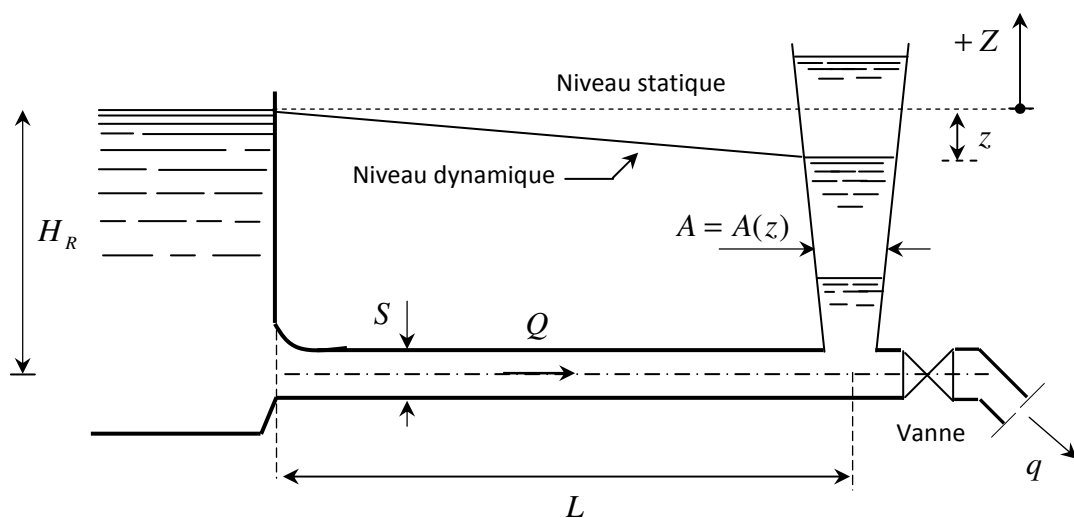


Figure 3. 20 Schéma d'une installation hydro-électrique munie d'une cheminée d'équilibre

En pratique, il existe une grande diversité de chambres d'équilibre. Suivant la figure (3.21), on peut distinguer :

- a) à d) la chambre simple, qui comprend un puits ouvert au-dessus de la galerie, éventuellement combinée avec un déversoir c) et d);
- e) à k) la chambre à épanouissements, dont une se trouve souvent à l'extrémité inférieure et l'autre à l'extrémité supérieure du puits, ce dernier éventuellement combiné avec un déversoir g), h) et k) ;
- l) à n) la chambre à orifice, dont la section d'entrée est rétrécie ;
- o) à s) la chambre différentielle, qui comprend un puits de montée central et des puits à orifice voisins.

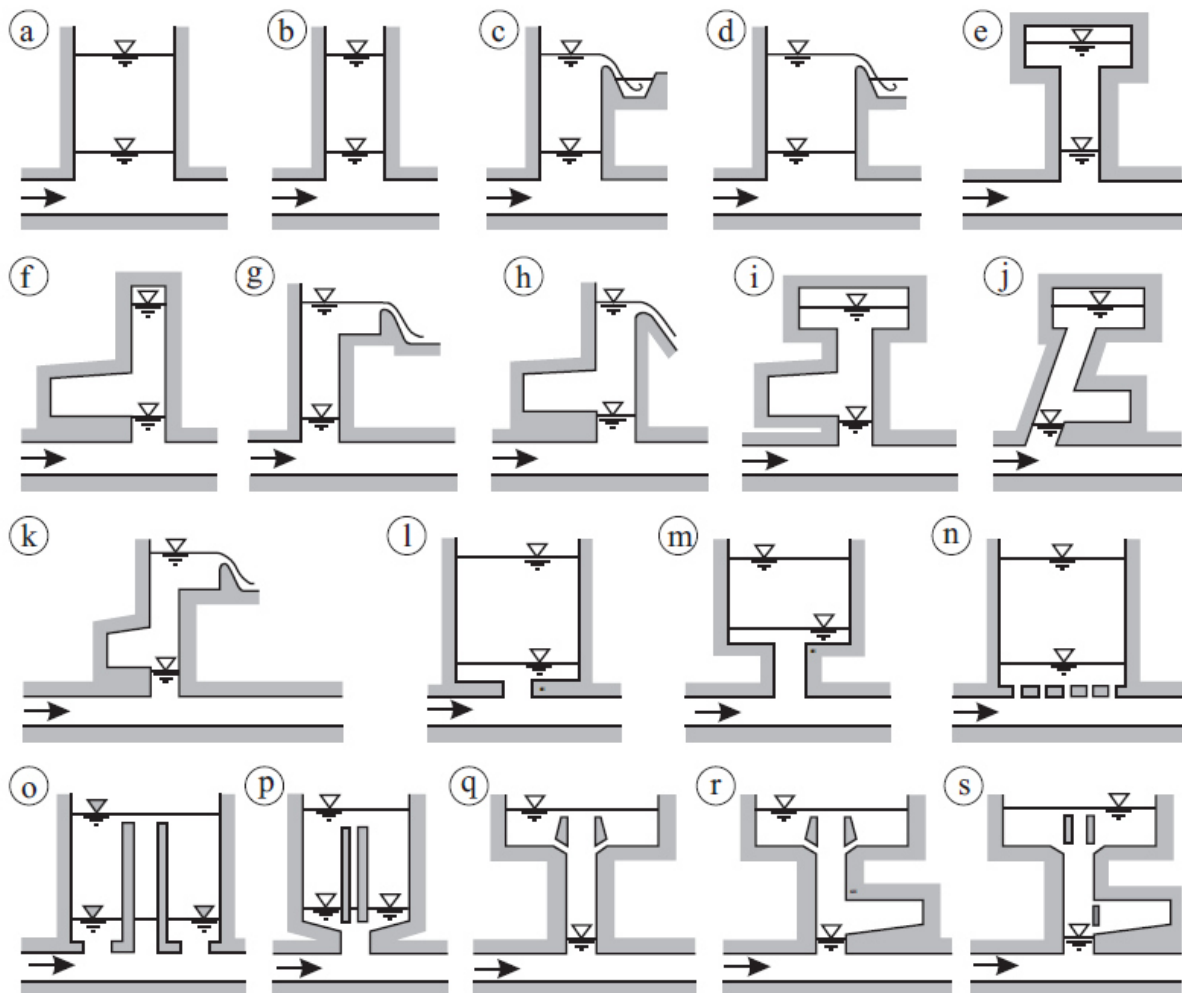


Figure 3.21 Types de chambres d'équilibre: a) à d) simple; e) à k) à épanouissement; l) à n) à orifice; o) à s) différentielle (selon Giesecke et al. 2014)

On donne sur la figure (3.22) l'exemple de la cheminée d'équilibre équipant la station hydroélectrique de Darguina à Bejaia (Algérie). Cette cheminée circulaire, semi-enterrée, s'élève sur une hauteur totale de 50 m, son diamètre intérieur est de 12 m à partir de la côte 424 m, en dessous de ce niveau son diamètre intérieur a été réduit à 10 m.

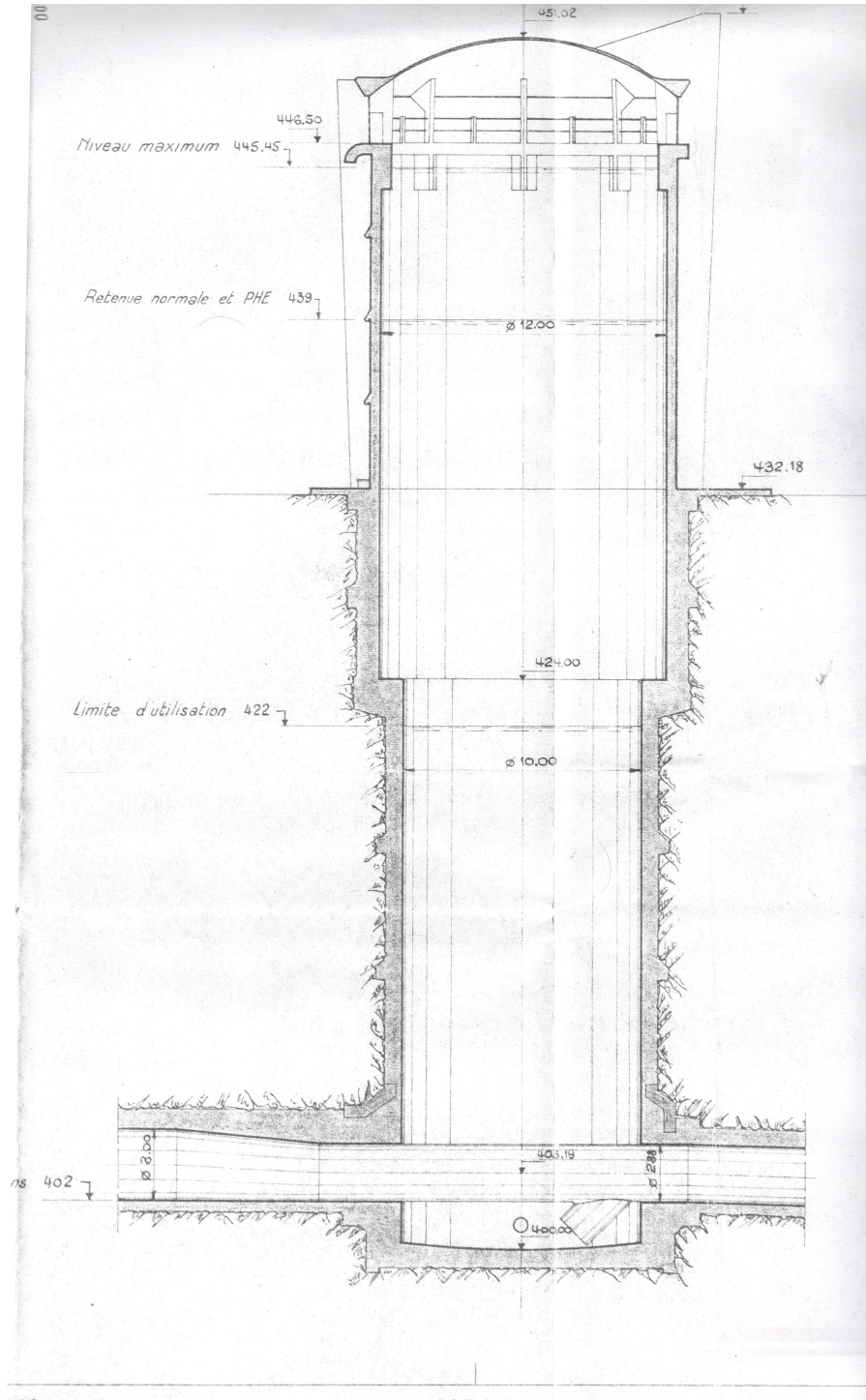


Figure 3.22 Coupe en élévation de cheminée équipant la station hydroélectrique de Darguina (Bejaia)

Dans le domaine des réseaux en charge, les cheminées sont rarement utilisées car il faudrait qu'elles aient une hauteur supérieure à la hauteur manométrique totale ; on n'imagine pas une telle cheminée dès que la hauteur de refoulement dépasse quelques mètres. Son emploi se justifie dans ce cas dans les stations de relevage en assainissement. La cheminée résout en outre le problème de l'évacuation d'air, et on peut facilement envisager de l'installer pour protéger localement un point haut puisqu'elle fonctionne sans apport d'énergie annexe.

Le dimensionnement d'une cheminée à section constant peut être abordé en première approximation par de simples formules découlant de la théorie de l'oscillation en masse. On cite la méthode de *Calame* et *Gaden* permettant de calculer la cote minimale de la surface libre dans le cas de la disjonction de la pompe. Aussi, il est possible de connaître la cote maximale de la remontée du plan d'eau après cette disjonction. Soulignons toutefois qu'actuellement un calcul numérique complet basé sur la méthode des caractéristiques est possible et s'affranchit de toute restriction d'usage permettant ainsi une bonne conception et dimensionnement par simulation informatique. Nous donnons ici simplement la méthode de *Calame* et *Gaden* adaptée au cas du refoulement et traduite sous forme analytique. A partir des variables suivantes :

$V_0$  : Vitesse en régime permanent (m/s) ;

$L$  : Longueur de la conduite (m) ;

$S$  : Section de la canalisation (m<sup>2</sup>) ;

$A$  : Section de la cheminée (m<sup>2</sup>) ;

$J_0$  : Perte de charge totale dans le tronçon aval (m)

On calcule l'amplitude du mouvement sinusoïdal autour de la ligne piézométrique statique :

$$H_{\max} = V_0 \sqrt{\frac{LS}{gA}} \quad (3.87)$$

La perte de charge relative :

$$K = \frac{J_0}{H_{\max}} \quad (3.88)$$

On en déduit par la suite les niveaux maximal et minimal respectivement par les formules :

$$\frac{H_m}{H_{\max}} = 0.973 - 1.326K + 0.654K^2 \quad (3.89)$$

$$\frac{H_d}{H_{\max}} = 1 - \frac{2}{3}K + \frac{1}{9}K^2 \quad (3.90)$$

Le niveau maximal n'est indiqué ici qu'à titre documentaire car en général c'est la charge au point de barbotage de la pompe qui induit la cote maximale réelle au démarrage.

### c) Réservoir d'air

Nous avons vu dans ce qui a précédé que l'emploi d'une cheminée d'équilibre à la station de pompage est pratiquement irréalisable excepté le cas des faibles hauteurs d'élévation. Dans ce cas, on fait appel à un autre dispositif de protection anti-bélier qui est le réservoir d'air. Appelé encore cloche d'air ou ballon anti-bélier, ce dispositif a reçu un vaste champ d'application et un emploi intensif dans la protection des conduites d'élévation, le rendant ainsi d'une utilisation quasi systématique dans les stations de pompage par suite des avantages innombrables qu'il présente. Le principe de fonctionnement est le même que pour une cheminée d'équilibre, celui d'une réserve d'eau qui se vide pour combler les dépressions et grossit pour absorber les surpressions. La différence provient de ce que cette réserve n'a pas une surface libre à la pression atmosphérique mais se trouve à la pression absolue du liquide à l'endroit où est piqué le ballon (Figure 3.23).

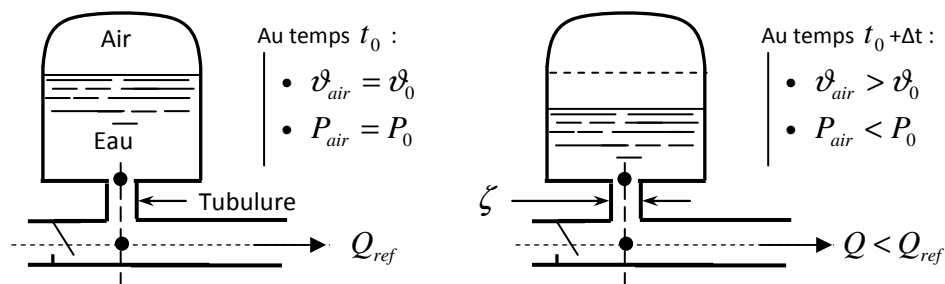


Figure 3.23 Illustration de la variation d'état en fonction du temps en phase de dépression

Ainsi, c'est le volume d'air enfermé dans le ballon qui régularise les variations de pression du liquide en se comprimant ou en se détendant en fonction du besoin. Le ballon anti-bélier est relié à la conduite de refoulement, après le clapet de la pompe, via une conduite ou tubulure de branchement. On dispose sur cette dernière un organe d'étranglement dissymétrique à forte perte de charge au retour de l'eau dans la cloche pour limiter les surpressions, au contraire très faible à la sortie (phase de dépression) pour que la réserve d'eau puisse alimenter facilement la conduite de refoulement et combler efficacement la dépression (Figure 3.24).

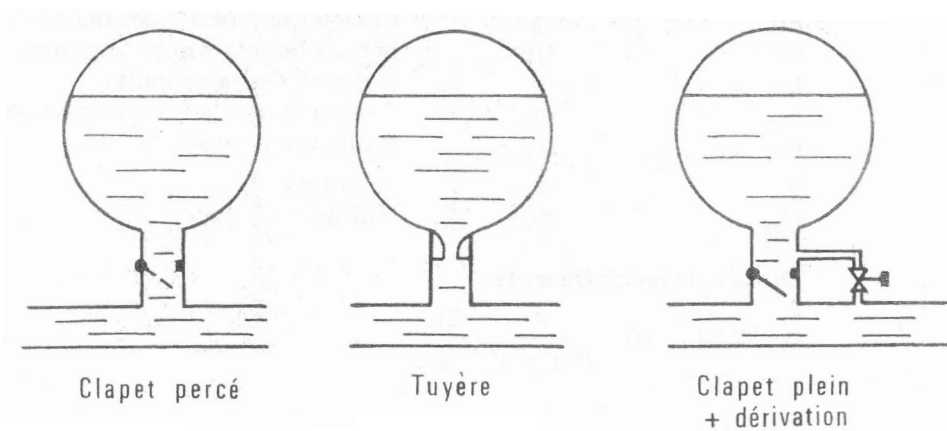


Figure 3.24 Organes dissymétriques à la base des ballons anti-bélier (Meunier, 1980)

Pour un bon fonctionnement, la perte de charge à l'entrée doit être modifiable pour l'ajuster à sa valeur optimale. Pour ainsi faire, on place sur la tubulure soit, un clapet à battant percé ou encore un clapet plein shunté par un by-pass sur lequel est placée une vanne d'étranglement pour ajuster la perte de charge locale.

Suivant la taille du réservoir anti-bélier, celui-ci peut être couché, debout ou parfois incliné pour des considérations liées à sa stabilité. Suivant l'encombrement de la station de pompage, il peut être placé soit à l'intérieur ou à l'extérieur du bâtiment de la station. Ces ballons sont soit munis d'une vessie ou sans. Pour le premier type, l'air est isolé dans une membrane élastique évitant le contact de l'air avec l'eau et ainsi sa dissolution graduel. Un dispositif de gonflage (automatique ou manuel) est prévu pour le second cas.

On dimensionne en général pour dispositif anti-bélier d'une part le ballon (volume total de la virole et volume d'air en régime normal de fonctionnement) pour se protéger contre les dépressions, et d'autre part la tubulure de branchement et les pertes de charge à la base du



ballon pour limiter les surpressions. A cet effet, plusieurs méthodes de pré-dimensionnement existent pour déterminer le volume  $v_0$  d'air en fonctionnement normal de façon à ce que tout le profil de la ligne de refoulement soit protégé contre la dépression consécutive à une disjonction. Aussi permettent-elles de déterminer la pression maximale en tête pour une perte de charge donnée de l'organe d'étranglement à la basse du ballon.

Ces méthodes, s'appuyant sur certaines hypothèses simplificatrices les une que les autres, permettent d'approcher assez bien (dans certains cas) les dimensions finales. On peut citer l'approche de *Vibert*, *Meunier* et *Puech* pour le calcul des volumes d'air et l'abaque de *Dubin* et *Gueneau* pour l'étude de la surpression au moyen de l'étranglement. On note au passage qu'une méthode récente proposée en 2002 par *Stephenson* permet le dimensionnement du ballon anti-bélier ainsi que les diamètres d'entrée et de sortie de ce dernier.

Il est à garder à l'esprit que ces méthodes restent prisonnières de leurs simplifications et peuvent conduire à des aberrations dans le dimensionnement. Il est préconisé à cet effet, surtout pour les installations importantes, d'effectuer une simulation numérique pour une vérification de la réponse dynamique en fonctionnement transitoire. Seule cette approche directe peut nous renseigner sur les dimensions exactes à donner au dispositif pour une protection optimale, quitte à procéder parfois par tâtonnements de simulations pour ce.

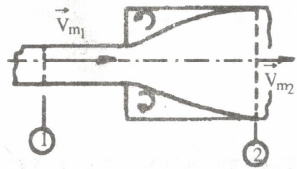
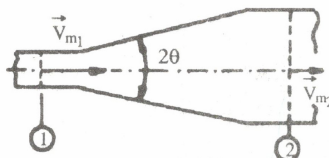
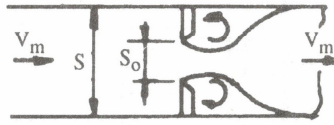
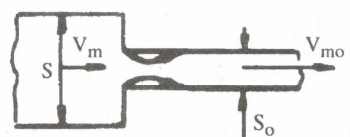
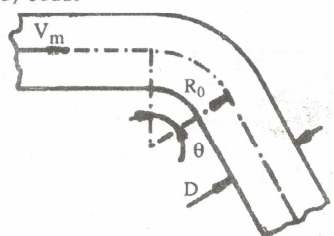
## Références Bibliographiques

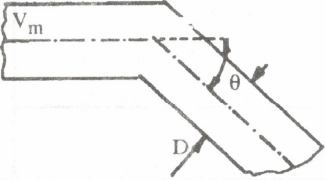
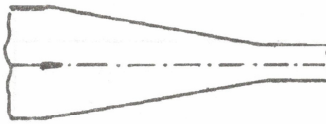
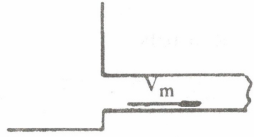
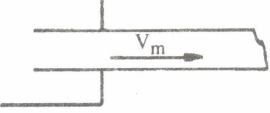
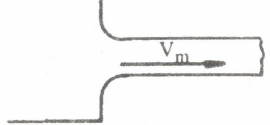
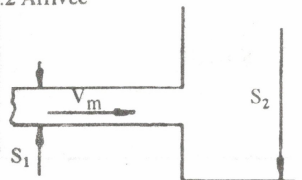
1. AMARA, L., BERREKSI, A., et AMIRECHE, M. *Simulation numérique du phénomène transitoire du coup de bélier: Application à des cas pratiques*. Éditions universitaires européennes, 2016.
2. ACHOUR, B. *Calcul des conduites et canaux par la MMR*, Larhyss Edition Capitale, 2007.
3. CARLIER, M. *Hydraulique générale et appliquée*, édition Eyrolles. 1980.
4. CHAUDHRY, M. H. *Applied hydraulic transients*. Springer New York, 2014.
5. DE ALMEIDA, A. B. et KOELLE, E. *Fluid transients in pipe networks*. Elsevier Applied Science, 1992.
6. DOUGLAS, John F. *Fluid mechanics*. Pearson/Prentice Hall, 2005.
7. DUPONT, A. *Hydraulique urbaine*. Tome II, ouvrages de transport-élévation et distribution des eaux. Eyrolles, 1979.
8. FEATHERSTONE, R. et NALLURI, C. *Civil engineering hydraulics*. Essential theory with worked examples. Blackwell science, 1988.
9. GIESECKE, J., HEIMERL, S. et MOSONYI, E. *Wasserkraftanlagen: Planung, Bau und Betrieb*. Springer-Verlag, 2014.
10. HUG, M. *Mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagement et d'énergie*. Eyrolles, 1975.
11. ROUSE, H. *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*. New York ; McGraw-Hill, 1938.
12. LAROCK B. E., JEPPSON, R. W. et WATTERS G. Z. *Hydraulics of pipeline systems*. CRS Press, 2000.
13. LENCASTRE, A. *Manuel d'hydraulique générale*. Eyrolles, Paris, 1996.
14. MEUNIER, M. *Les coups de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression*. Ecole Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts, 1980.
15. MOREL, M. et LABORDE, J.P. *Exercices de mécanique des fluides*. Tome I et Tome II, Chihab-Eyrolles, 1994.
16. STREETER, V. L. *Fluid mechanics*. International Student Edition, MacGraw-Hill, 1962.
17. WYLIE, E. B. et STREETER, V. L. *Fluid transients*. McGraw-Hill, New York, 1978.

# *Annexe*

*Table des principales pertes de charge singulières dans les écoulements forcés*

*(D'après Morel et Laborde, 1994)*

SINGULARITE	PERTE DE CHARGE	VALEUR DE K																								
1) Elargissement brusque		Formule de Barré de St Venant $K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$																								
2) Elargissement progressif		$K = b \left( \frac{d^2}{D^2} - 1 \right)^2 \text{ avec}$ <table><tr><td>2θ</td><td>5°</td><td>6°</td><td>7°</td><td>8°</td><td>10°</td></tr><tr><td>b</td><td>0,049</td><td>0,062</td><td>0,075</td><td>0,088</td><td>0,119</td></tr></table> <table><tr><td>2θ</td><td>16</td><td>18</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td></tr><tr><td>b</td><td>0,245</td><td>0,307</td><td>0,389</td><td>0,8</td><td>0,9</td></tr></table> <p>Si <math>2\theta &gt; 40^\circ</math>, il y a décollement du fluide; comportement comme un élargissement brusque</p>	2θ	5°	6°	7°	8°	10°	b	0,049	0,062	0,075	0,088	0,119	2θ	16	18	20	30	40	b	0,245	0,307	0,389	0,8	0,9
2θ	5°	6°	7°	8°	10°																					
b	0,049	0,062	0,075	0,088	0,119																					
2θ	16	18	20	30	40																					
b	0,245	0,307	0,389	0,8	0,9																					
3) Diaphragme		$K = \left( \frac{S}{m S_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \text{ avec } m = 0,62$																								
4) Rétrécissement de Longueur L		$K = \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \text{ avec } m = 0,62$ <p><math>K = 0,49</math> ; on prend <math>K = 0,5</math> valable pour S suffisamment différent de <math>S_0</math></p>																								
5) Coude		Formule de Weisbach $K = \left[ 0,131 + 1,847 \left( \frac{D}{2 R_0} \right)^{\frac{7}{2}} \right] \frac{\theta}{90^\circ}$ <p>θ en degrés</p>																								

SINGULARITE	PERTE DE CHARGE	VALEUR DE K
6) Coude à angles vifs 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	Formule de Weisbach $K = 0,947 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2,047 \sin^4 \frac{\theta}{2}$
7) Rétrécissement progressif 	négligeable	
8) Raccordements Conduite-Réservoir 8.1 Départ a) brusque 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,5$
b) saillie 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 1$
c) profilé 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,05$
8.2 Arrivée 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \text{ avec } S_2 \gg S_1$ $K \approx 1$ valable quelle que soit la forme d'arrivée

SINGULARITE	PERTE DE CHARGE	VALEUR DE K
9) Branchements et dérivations de mêmes diamètres (d'après SCIMEMI)		
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,5$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 1$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 3$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,05$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,15$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 1,5$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,10$

SINGULARITE	PERTE DE CHARGE	VALEUR DE K																												
ROBINETTERIES																														
10) Vanne opercule	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table><tr><td><math>\frac{x}{D}</math></td><td><math>\frac{1}{8}</math></td><td><math>\frac{2}{8}</math></td><td><math>\frac{3}{8}</math></td><td><math>\frac{4}{8}</math></td><td><math>\frac{5}{8}</math></td><td><math>\frac{6}{8}</math></td><td><math>\frac{7}{8}</math></td></tr><tr><td>K</td><td>0,07</td><td>0,26</td><td>0,81</td><td>2,06</td><td>5,52</td><td>17</td><td>98</td></tr></table> <p>La réduction du débit est sensible en fin de course.</p>	$\frac{x}{D}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	K	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17	98												
$\frac{x}{D}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$																							
K	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17	98																							
11) Vanne papillon	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table><tr><td><math>\alpha^\circ</math></td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>30</td></tr><tr><td>K</td><td>0,24</td><td>0,52</td><td>0,90</td><td>1,5</td><td>3,9</td></tr></table> <table><tr><td><math>\alpha^\circ</math></td><td>40</td><td>45</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td></tr><tr><td>K</td><td>11</td><td>19</td><td>33</td><td>118</td><td>750</td></tr></table>	$\alpha^\circ$	5	10	15	20	30	K	0,24	0,52	0,90	1,5	3,9	$\alpha^\circ$	40	45	50	60	70	K	11	19	33	118	750				
$\alpha^\circ$	5	10	15	20	30																									
K	0,24	0,52	0,90	1,5	3,9																									
$\alpha^\circ$	40	45	50	60	70																									
K	11	19	33	118	750																									
12) Robinet à Boisseau	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table><tr><td><math>\alpha^\circ</math></td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td></tr><tr><td>K</td><td>0,05</td><td>0,29</td><td>0,75</td><td>1,6</td><td>3,1</td><td>5,5</td></tr></table> <table><tr><td>35</td><td>40</td><td>45</td><td>50</td><td>55</td><td>60</td><td>65</td></tr><tr><td>9,7</td><td>17</td><td>31</td><td>53</td><td>110</td><td>206</td><td>490</td></tr></table>	$\alpha^\circ$	5	10	15	20	25	30	K	0,05	0,29	0,75	1,6	3,1	5,5	35	40	45	50	55	60	65	9,7	17	31	53	110	206	490
$\alpha^\circ$	5	10	15	20	25	30																								
K	0,05	0,29	0,75	1,6	3,1	5,5																								
35	40	45	50	55	60	65																								
9,7	17	31	53	110	206	490																								
13) Clapet à battant	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table><tr><td><math>\alpha^\circ</math></td><td>15</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td><td>45</td></tr><tr><td>K</td><td>90</td><td>62</td><td>42</td><td>30</td><td>20</td></tr></table> <table><tr><td><math>\alpha</math></td><td>40</td><td>45</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td></tr><tr><td>K</td><td>14</td><td>9,5</td><td>6,6</td><td>3,2</td><td>1,7</td></tr></table> <p>La Société PONT A MOUSSON donne les valeurs de K pour le clapet positionné horizontalement, comme sur le schéma alors que M. CARLIER (Hydraulique générale et appliquée) donne les mêmes valeurs pour le clapet positionné vericalement.</p>	$\alpha^\circ$	15	20	25	30	45	K	90	62	42	30	20	$\alpha$	40	45	50	60	70	K	14	9,5	6,6	3,2	1,7				
$\alpha^\circ$	15	20	25	30	45																									
K	90	62	42	30	20																									
$\alpha$	40	45	50	60	70																									
K	14	9,5	6,6	3,2	1,7																									