Analyse Fonctionnelle

Dr. Amira Makhlouf

10 novembre 2025

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

CHAPITRE 1

Espaces vectoriels topologiques

1.1 Espaces topologiques

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble non vide. On appelle* ***topologie*** *sur X toute partie τ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les axiomes suivants*

$(\mathcal{O}_1)$ $\emptyset \in \tau$, $X \in \mathcal{T}$;

$(\mathcal{O}_2)$ *pour tout* $A, B \in \tau$, $A \cap B \in \mathcal{T}$. ;

$(\mathcal{O}_3)$ *pour tout* $(A_i)_{i\in I} \in \tau$, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$.

- *Les éléments de τ s'appellent* ***les ouverts*** *ou* ***les parties ouvertes*** *de X.*
- *L'ensemble X, muni de la topologie τ, est appelé* ***espace topologique****, on le note quelquefois (X, τ).*

Soit (X, τ) un espace topologique.

- *On dit que $A \subset X$ est un* ***fermé*** *ou une* ***partie fermée*** *de X si le complémentaire de A dans X est ouvert. Autrement dit, si l'on a $C_X^A \in \tau$.*
- *Soit x un point de X. On dit qu'une partie V de X est un* ***voisinage*** *de x s'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de τ tel que $x \in \mathcal{O} \subset V$.*

  On note $\mathcal{V}(x)$ la famille des voisinages de x,

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X, \ \exists \mathcal{O} \in \tau, \ x \in \mathcal{O} \subset V\}.$$

- *Soit τ_1 et τ_2 deux topologies définies sur un ensemble X. On dit que τ_1 est* ***plus faible*** *ou* ***moins fine*** *que τ_2 si $\tau_1 \subset \tau_2$. Cela définit une relation d'ordre sur les topologies de X.*

Proposition 1.1.1. *Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$. A est un ouvert si et seulement s'il est un voisinage de chacun de ses points.*

Définition 1.1.2. *Soit (X, τ) un espace topologique.*

- *On appelle* ***base d'ouverts*** *toute partie $\mathcal{B} \subset \tau$ telle que tout ouvert est réunion d'ouverts de $\mathcal{B}$, i.e.,*

$$\forall \mathcal{O} \in \tau,\ \exists (B_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B},\ \mathcal{O} = \bigcup_{i\in I} B_i.$$

- *Soit $x \in X$. On appelle* ***système fondamental de voisinages*** *de x ou* ***base de voisinages*** *de x, toute partie $\mathcal{B}_x$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $B \in \mathcal{B}_x$ tel que $B \subset V$, i.e.,*

$$\forall \mathcal{V} \in \mathcal{V}(x),\ \exists B \in \mathcal{B}_x,\ B \subset V.$$

Définition 1.1.3. *Un espace topologique (X, τ) est dit* ***séparé*** *ou* ***de Hausdorff*** *si la propriété suivante est vérifiée, dite* ***propriété de séparation de Hausdorff***

(**H**) *Pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe deux ouverts contenant respectivement x et y, d'intersection vide.*

Proposition 1.1.2. *Un espace topologique X est séparé si et seulement si pour tout point $x \in X$, l'intersection de tous les voisinages fermés de x se réduit à $\{x\}$.*

Corollaire 1.1. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé et soit $x \in X$. Le singleton $\{x\}$ est fermé.*

Remarque 1.1.1. La propriété de Hausdorff est équivalente à

($\mathbf{H_1}$) Pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$, tels que $V \cap W = \emptyset$.

Définition 1.1.4. *Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$.*

- *On dit qu'un point $x \in X$ est* ***intérieur*** *à A si A est un voisinage de x dans X.*
- *L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle* ***L'intérieur de*** *A et se note $Int(A)$ (ou bien $\mathring{A}$). Alors*

$$x \in Int(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists O \in \tau,\ x \in O \subset A.$$

- *On dit qu'un point* $x \in X$ *est* ***adhérent à*** A *si pour tout* $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$.
- *L'ensemble des points adhérents à* A *s'appelle* ***l'adhérence (ou fermeture) de*** A *et se note* $\overline{A}$. *Alors*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset.$$

- *On appelle* ***frontière*** *de* A *et on note* $Fr(A)$, *l'ensemble*

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{C_X^A} = \overline{A} \cap C_X^{Int(A)} = \overline{A} \setminus Int(A).$$

La frontière de A *est donc un fermé de* (X, τ).

Proposition 1.1.3. *Soit* A *et* B *deux parties d'un espace topologique* (X, τ). *Alors, on a*

1. $Int(A)$ *est le plus grand des ouverts contenus dans* A ;
2. $\overline{A}$ *est le plus petit fermé qui contient* A.
3. A *est ouvert si et seulement si* $A = Int(A)$;
4. A *est fermé si est seulement si* $A = \overline{A}$;
5. *si* $A \subset B$ *alors on a* $Int(A) \subset Int(B)$ *et* $\overline{A} \subset \overline{B}$;
6. $C_X^{Int(A)} = \overline{C_X^A}$ *et* $C_X^{\overline{A}} = Int(C_X^A)$;
7. $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$;
8. $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$
9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
10. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Si $\mathcal{B}_x$ *est une base de voisinages d'un point* $x \in X$ *alors*

1. $x \in Int(A)$ *si et seulement s'il existe* $V \in \mathcal{B}_x$ *tel que* $V \subset A$.
2. $x \in \overline{A}$ *si et seulement si pour tout* $V \in \mathcal{B}_x$, $V \cap A \neq \emptyset$.

Définition 1.1.5. *Soit* (X, τ) *un espace topologique. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* X *et* $\ell \in X$.

1. *On dit que* ℓ *est une* ***limite*** *de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *quand* n *tend vers l'infini si pour tout voisinage* V *de* ℓ *dans* X, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq n_0$, $x_n \in V$. *Cela se résume en*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V.$$

2. *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* ***convergente*** *si elle a une (ou plusieurs) limite,* ***divergente*** *si elle n'a pas de limite.*

Proposition 1.1.4. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé, alors toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au plus une limite.*
Si une telle limite $\ell \in X$ existe, on dit que ℓ est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ quand n tend vers l'infini et on note $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Définition 1.1.6. *Soient (X, τ) et (Y, Θ) deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application et $x_0 \in X$.*
On dit que f est ***continue*** *au point x_0 si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes.*

1. *Pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 dans X.*
2. *Pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y , il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que $f(V) \subset W$.*

On dit que f est continue sur X si elle l'est en tout point de X.

Définition 1.1.7. *Un* ***homéomorphisme*** *d'un espace topologique (X, τ) sur un autre espace topologique (Y, Θ) est une application $f : X \to Y$ bijective continue et dont l'inverse $f^{-1} : Y \to X$ est continue.*
On dit que deux espaces topologiques X et Y sont ***homéomorphes*** *s'il existe un homéomorphisme entre eux, et on note $X \backsimeq Y$.*

Proposition 1.1.5. *Soient (X, τ) et (Y, Θ) deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est continue.*

(ii) *Pour toute partie A de X, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

(iii) *Pour tout fermé S de Y, $f^{-1}(S)$ est un fermé de X.*

(iv) *Pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X.*

Définition 1.1.8. *Soit X un ensemble non vide. On appelle* ***distance*** *sur X toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants.*

1. Séparation. *Pour tous* $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2. Symétrie. *Pour tout* $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

3. Inégalité triangulaire. *Pour tous* $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Le couple (X, d) *est appelé un* ***espace métrique***.

Définition 1.1.9 (Boules). *Soient* (X, d) *un espace métrique,* $x_0 \in X$ *et* $r > 0$.

- *On appelle* ***boule ouverte*** *de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$B(x_0, r) = \{y \in X,\ d(x_0, y) < r\}.$$

- *On appelle* ***boule fermée*** *de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$\overline{B}(x_0, r) = \{y \in X,\ d(x_0, y) \leq r\}.$$

- *On appelle* ***sphère*** *de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$S(x_0, r) = \{y \in X,\ d(x_0, y) = r\}.$$

On remarque que $\overline{B}(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r)$.

Proposition 1.1.6. *Soit* (X, d) *un espace métrique et soit* τ_d *la famille de sous ensembles de* X *définie par*

$$\tau_d = \{A \subset X,\ \forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset A\}.$$

Alors τ_d *est une topologie sur* X *appelée* ***la topologie associée à*** d. (X, d) *est donc un espace topologique.*

Proposition 1.1.7. *Soit* (X, d) *en espace métrique.*
Toute boule ouverte est un ouvert et toute boule et fermée est un fermé.

Proposition 1.1.8. *Tout espace métrique est séparé.*

Définition 1.1.10. *On appelle* ***suite de Cauchy*** *toute suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* X *vérifiant*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ m > n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

i.e., $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m > n}} d(x_n, x_m) = 0$.

Proposition 1.1.9. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Définition 1.1.11. *Un espace métrique (X, d) et dit* ***complet*** *si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.*

Définition 1.1.12. *Un espace topologique (X, τ) est dit* ***compact*** *s'il est séparé et s'il vérifie la propriété suivante dite* ***axiome de Borel-Lebesgue****.*

De tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e.,

$$\forall (O_i)_{i \in I} \subset \tau,\ X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I,\ J \text{ fini}; X = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Théorème 1.1.10. *Un espace métrique (X, d) est compact si seulement s'il vérifie l'assertion suivante dite axiome de* ***Bolzano-Weirstrass*** *:*

De toute suite d'éléments de (X, d) on peut extraire une sous suite qui converge.

Définition 1.1.13. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.*

On appelle ***norme*** *sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants.*

1. Séparation. *Pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*
2. Homogénéité. *Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.*
3. Inégalité triangulaire. *Pour tout $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.*

Le couple (E, N) est alors appelé ***espace vectoriel normé****.*

Remarque 1.1.2.

- $N(0) = 0$ (en prenant $\lambda = 0$ dans 2.).
- On note la norme N par $\| \cdot \|$, c-à-d, $N(x) = \|x\|$.

Proposition 1.1.11. *Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E$$

est une distance sur E appelée ***distance induite par la norme****. La topologie induite par cette distance est dite* ***topologie associée à la norme****.*

1.2 Généralités sur les espaces vectoriels topologiques

Définition 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit τ une topologie sur E.*

(E, τ) est dit ***espace vectoriel topologique (e.v.t)*** *s'il vérifie les axiomes suivants :*

1. *L'origine $\{0_E\}$ est fermé dans E ;*
2. *les applications suivantes*

$$(l'addition) \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

et

$$(la\ multiplication\ par\ un\ scalaire) \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues (les ensembles $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$ étant respectivement munis des topologies produits).

Exemple 1.2.1. *Tout espace normé est un e.v.t.*

En effet, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors $\{0_E\}$ est fermé dans E. Aussi, pour $(x, y), (a, b) \in E \times E$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\|(x + y) - (a + b)\| = \|x - a\| + \|y - b\| = \|(x, y) - (a, b)\|.$$

Donc, si $\|x - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|y - b\| < \frac{\varepsilon}{2}$ on a $\|(x + y) - (a + b)\| < \varepsilon$. C'est à dire que, pour $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, on a

$$(x, y) \in B((a, b), \delta) \Rightarrow \|(x + y) - (a + b)\| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $(x, y) \mapsto x + y$ est continue. Finalement, pour $(\lambda, x), (\xi, a) \in \mathbb{K} \times E$ on a

$$\lambda x - \xi a = (\lambda - \xi)(x - a) + (\lambda - \xi)a + \xi(x - a).$$

Alors, pour $\delta > 0$ et $(x, y) \in B((\xi, a), \delta)$ on a

$$\begin{array}{rcl} \|\lambda x - \xi a\| & \leq & |\lambda - \xi|\|x - a\| + |\lambda - \xi|\|a\| + |\xi|\|x - a\| \\ & \leq & \delta^2 + (\|a\| + |\xi|)\delta. \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors, $\delta_0 = \frac{-(\|a\|+|\xi|)+\sqrt{(\|a\|+|\xi|)^2+4\varepsilon}}{2}$ est solution de l'équation

$$\delta^2 + (\|a\| + |\xi|)\delta - \varepsilon = 0.$$

C'est à dire

$$(x, y) \in B((\xi, a), \delta_0) \Rightarrow \|\lambda x - \xi a\| < \delta_0^2 + (\|a\| + |\xi|)\delta_0 = \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue

Corollaire 1.2. *Soit (E, τ) un e.v.t et soient $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Soit U un ouvert de E et $A \subset E$. Alors $a+U$ et $A+U = \bigcup_{x\in A}(x+U)$ sont des ouverts de E et λU est un ouvert de E si $\lambda \neq 0$.*
2. *Soit F un fermé de E. Alors $a + F$ et λF sont des fermés de E.*
3. *Soit K un compact de E. Alors $a + K$ et λK sont des compacts de E.*

Proposition 1.2.1. *Soit (E, τ) un e.v.t.*

1. *Pour tout $a \in E$, la translation $T_a : x \mapsto a + x$ est un homéomorphisme de E.*
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'homothétie $M_\lambda : x \mapsto \lambda x$ est un homéomorphisme de E.*
3. *L'application $(x, y) \mapsto x - y$ est continue de $E \times E$ dans E.*

Proposition 1.2.2. *Tout espace vectoriel topologique est séparé.*

Preuve.

Soit (E, τ) un e.v.t et soient $x_0, y_0 \in E$ tels que $x_0 \neq y_0$, alors $x_0 - y_0 \neq 0_E$. Puisque $\{0_E\}$ est fermé dans E, alors $E \setminus \{0_E\}$ est un ouvert de E qui contient $x_0 - y_0$. Puisque l'application $(x, y) \mapsto x - y$ est continue de $E \times E$ dans E, il existe un voisinage V de x_0 et un voisinage W de y_0 tels que $V - W \subset E \setminus \{0_E\}$, d'où $V \cap W = \emptyset$. Par consequent, (E, τ) est separé. $\square$

1.3 Propriétés des voisinages de 0_E dans un espace vectoriel topologique

Définition 1.3.1. *Soit (E, τ) un e.v.t.*

- *Un sous ensemble $A \subset E$ est dit* ***borné*** *si pour tout voisinage V de zéro il existe $s > 0$ tel que $A \subset sV$.*
- *$A \subset X$ est dit* ***équilibré*** *si $\lambda A \subset A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$.*
- *Une* ***base locale*** *de E est une base de voisinage de 0_E.*

Proposition 1.3.1. *Soit (E, τ) un e.v.t.*

1. *Soit $a \in E$. Les voisinages de a sont de la forme $a + V$, où V représente un voisinage de 0_E. Ainsi, la topologie d'un espace vectoriel topologique est entièrement déterminée par l'ensemble des voisinages de 0_E.*
2. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Soit V un sous-ensemble de E. Alors V est un voisinage de 0_E dans E si et seulement si λV est un voisinage de 0_E dans E.*
3. *Si $\mathcal{B}$ est une base locale de E, alors tout élément de $\mathcal{B}$ contient l'adhérence d'un élément de $\mathcal{B}$. En particulier, E possède une base locale formée d'ensembles fermés.*
4. *E possède une base locale formée d'ensembles équilibrés.*
5. *Soient V un voisinage de 0_E et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K}$ telle que $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = +\infty$. Alors on a $E = \bigcup_{n\geq 0} \alpha_n V$.*

Preuve.

Les propriétés 1. et 2. résultent de la Proposition 1.2.1.

3. Soit $U \in \mathcal{B}$. Puisque l'application $(x, y) \mapsto x - y$ est continue de $E \times E$ dans E, elle est continue en $(0_E, 0_E)$ et comme $0_E - 0_E = 0_E$, il existe V_1, V_2 deux voisinages de 0_E tels que $V_1 - V_2 \subset U$. Or, $V_1 \cap V_2$ est voisinage de 0_E et $\mathcal{B}$ est une base locale de E alors il existe un voisinage ouvert V de 0_E tel que $V \subset V_1 \cap V_2$ et donc $V - V \subset V_1 - V_2 \subset U$. Donc $V - V \cap C_E^U = \emptyset$, ce qui est équivalent à $V \cap (C_E^U + V) = \emptyset$. Puisque $C_E^U + V$ est ouvert dans E, alors on a

$$\begin{aligned} V \cap (C_E^U + V) = \emptyset &\Leftrightarrow (C_E^U + V) \subset C_E^V \\ &\Leftrightarrow (C_E^U + V) \subset Int(C_E^V) = C_E^{\overline{V}} \\ &\Leftrightarrow \overline{V} \cap (C_E^U + V) = \emptyset \end{aligned}$$

et comme $0_E \in V$

$$\overline{V} \cap C_E^U \subset \overline{V} \cap (C_E^U + V)$$

donc $\overline{V} \cap C_E^U = \emptyset$. Autrement dit, on a $\overline{V} \subset U$.

Comme V est un voisinage de 0_E, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset V$ et donc $\overline{B} \subset \overline{V} \subset U$.

4. Soit U un voisinage de 0_E. Puisque l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue de $\mathbb{K} \times E$ dans E, elle est continue en $(0, 0_E)$ et comme $0 \cdot 0_E = 0_E$, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage V de 0_E tels que $\alpha V \subset U$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| < \varepsilon$, alors $\bigcup\limits_{|\alpha|<\varepsilon} \alpha V \subset U$. On pose $W = \bigcup\limits_{|\alpha|<\varepsilon} \alpha V$, alors W est un voisinage équilibré de 0_E tel que $W \subset U$. En effet, si $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| < \varepsilon$, on a

$$|\alpha\lambda| = |\alpha||\lambda| \leq |\alpha| < \varepsilon.$$

Donc $\lambda W = \bigcup\limits_{|\alpha|<\varepsilon} \lambda\alpha V \subset W$.

5. Soit $x \in E$. Puisque la suite $\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)_{n\geq 0}$ tend vers 0_E, alors il existe $n_0 \geq 0$ tel que $\frac{x}{\alpha_{n_0}} \in V$, d'où $x \in \alpha_{n_0} V$. Par conséquent, on a $E = \bigcup\limits_{n\geq 0} \alpha_n V$. □

Proposition 1.3.2. *Soit A un sous ensemble d'un espace vectoriel topologique (E, τ).*

1. *On a $\overline{A} = \bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}(0)} (A + V) = \bigcap\limits_{V \in \mathcal{B}} (A + V)$ où $\mathcal{B}$ est une base locale de E.*
2. *Si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.*
3. *Si A est convexe tel que $\mathring{A} \neq \emptyset$, alors pour tout $x_0 \in \mathring{A}$ et pour tout $x \in \overline{A}$, on a $[x_0, x[\subset \mathring{A}$. En particulier, $\mathring{A}$ est convexe.*
4. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$ et si $\lambda \neq 0$, $\mathring{\overline{\lambda A}} = \lambda \mathring{A}$.*
5. *Si A est équilibré, alors $\overline{A}$ est équilibré. Si de plus, on a $0 \in \mathring{A}$, alors $\mathring{A}$ est équilibré.*

Proposition 1.3.3. *Soit (E, τ) un e.v.t.*

1. *Tout sous ensemble compact de E est borné.*
2. *Soient V un voisinage borné de 0_E et $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite décroissante, alors la famille $\{\delta_n V;\ n \geq 1\}$ est une base locale de E*

Preuve.

1. Soit K un sous ensemble compact de E et soit V un voisinage ouvert équilibré de 0_E dans E. D'après la Proposition 1.3.1, on a $E = \bigcup\limits_{n\geq 0} nV$, donc $K \subset \bigcup\limits_{n\geq 0} nV$. Comme K est compact, alors il existe $p \geq 1$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{p} nV$. Comme V est équilibré, alors pour tout $n \geq 0$, on a $nV \subset (n+1)V$, d'où $K \subset pV$. Donc K est borné.

2. Notons d'abord que pour tout $n \geq 0$, $\delta_n V$ est un voisinage de 0_E. Soit U un voisinage équilibré de 0_E. Puisque V est borné, il existe un réel $s > 0$ tel que $V \subset sU$. La suite $(s\delta_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0, donc il existe $n_0 \geq 0$ tel que $s|\delta_{n_0}| \leq 1$, d'où on a $s\delta_{n_0} U \subset U$. Par conséquent, on a $V \subset sU \subset \frac{1}{\delta_{n_0}} U$, d'où $\delta_{n_0} V \subset U$. Donc $(\delta_n V)_{n\geq 0}$ est une base locale de E.

$\square$

1.4 Types d'espaces vectoriels topologiques

Définition 1.4.1. *Une distance d sur un espace vectoriel E est dite* ***invariante par translation****, si pour tous $x, y, z \in E$, on a*

$$d(x+z, y+z) = d(x, y).$$

Définition 1.4.2. *Soit (E, τ) un e.v.t.*

1. *E est dit* **localement convexe** *s'il existe une base locale dont les éléments sont convexes.*
2. *E est dit* **localement borné** *si 0_E admet un voisinage borné.*
3. *E est dit* **localement compact** *si 0_E admet un voisinage relativement compact.*
4. *E est dit* **métrisable** *si τ est induite par une certaine distance d.*
5. *E est dit* **un F-espace** *si τ est induite par une certaine distance invariante par translation d par rapport à laquelle E est complet.*
6. *E est dit* **un espace de Fréchet** *si E est un F-espace localement compact.*
7. *E est dit* **normable** *s'il existe une norme sur E dont la topologie associée est τ.*
8. *E possède* **la propriété de Heine-Borel** *si tout sous-ensemble fermé borné de E est compact.*

Proposition 1.4.1. *Soit (E, τ) un e.v.t.*

1. *Si E est localement borné, alors E admet une base locale dénombrable.*
2. *E est métrisable si et seulement si E admet une base locale dénombrable.*

3. *E est normable si et seulement si E est localement convexe et localement borné.*

4. *E est de dimension finie si et seulement si E est localement compact.*

5. *Si un espace localement borné E possède la propriété de Heine-Borel, alors E est de dimension finie.*

CHAPITRE 2

Théorèmes Généreaux D'Analyse Fonctionnelle

2.1 Généralités

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés.

Proposition 2.1.1. *Une application (opérateur) linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement si il existe $c > 0$ tel que*

$$\|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

L'ensemble des applications linéaires continues est noté $\mathcal{L}(E, F)$, c'est un espace vectoriel. L'application $f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ définie sur $\mathcal{L}(E, F)$ par

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E < 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},$$

est une norme sur l'espace $\mathcal{L}(E, F)$.
Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ l'est aussi.

Définition 2.1.1.
*On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire définie sur E **à valeurs dans** $\mathbb{K}$.*
*On appelle **dual topologique** de E, et on le note E', l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E, c'est-à-dire, $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.*

E' est muni de la **norme duale**

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} |f(x)|,$$

où $\overline{B}(0,1)$ désigne la boule unité fermée de E.

Lorsque $f \in E'$ et $x \in E$, on notera généralement $\langle f, x \rangle$ au lieu de $f(x)$. On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le **produit de dualité** entre E' et E.

Comme $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est un espace de Banach, l'espace normé $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ estlui aussi un espace de Banach.

2.2 Théorème de Baire

Théorème 2.2.1 (Baire). *Soit X un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}(X)$ une suite de fermés. On suppose que*

$$Int(F_n) = \emptyset, \ \textit{pour chaque } n \geq 1.$$

Alors

$$Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \emptyset.$$

Preuve.

On pose, pour tout pour tout $n \geq 1$, $O_n = C_X^{F_n}$. Alors O_n est un ouvert, de plus, puisque $Int(F_n) = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$, on a

$$\overline{O_n} = \overline{C_X^{F_n}} = C_X^{Int(F_n)} = C_X^{\emptyset} = X.$$

Donc chaque O_n est dense dans X.

Montrons que $G = \bigcap_{n \geq 1} O_n$ est dense dans X.

Soit V un ouvert non vide de X. On va prouver que $V \cap G \neq \emptyset$.

Soit $x_0 \in V$ et soit $r_0 \in]0, 1[$ tel que

$$\overline{B}(x_0, r_0) \subset V.$$

Puisque O_1 est dense dans X, on a

$$B(x_0, r_0) \cap O_1 \neq \emptyset.$$

On choisit $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ et $r_1 > 0$ tels que

$$\begin{cases} \overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap O_1, \\ 0 < r_1 < \frac{r_0}{2}. \end{cases}$$

Ceci est possible puisque O_1 est ouvert. Ainsi, par recurrence, on construit deux suites (x_n) et (r_n) telles que

$$\begin{cases} \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}, \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}. \end{cases}, \ \forall n \geq 0.$$

Il en résulte que la suite (x_n) est de Cauchy, car par construction, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$x_{n+p} \in B(x_n, r_n). \tag{2.1}$$

Donc

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq r_n < 2^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme X est complet, la suite (x_n) converge vers un certain $\ell \in X$. On obtient de (2.1), en faisant tendre $p \to \infty$

$$\ell \in \overline{B}(x_n, r_n), \ \forall n \geq 1.$$

Ainsi, $\ell \in G$. De plus, $\ell \in \overline{B}(x_0, r_0) \subset V$, donc $V \cap G \neq \emptyset$. $\square$

Un énoncé équivalent au Théorème de Baire en passant au complémentaire $O_n = C_X^{F_n}$ est le suivant.

Théorème 2.2.2 (Baire, $2^{\text{ème}}$ version). *Sois X un espace métrique complet. Alors l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses dans X est aussi dense dans X.*

2.3 Théorème de Banach-Steinhaus

Dans le résultat suivant, on déduit une estimation uniforme à partir d'une estimation ponctuelle.

Théorème 2.3.1 (Banach-Steinhaus, Uniform Boundness Principle). *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\|_F < +\infty, \quad \forall x \in E. \tag{2.2}$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty. \tag{2.3}$$

Autrement dit, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|T_i x\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E,\ \forall i \in I. \tag{2.4}$$

Preuve.

Pour la preuve, on utilise le théorème de Baire. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{aligned} F_n &= \{x \in E;\ \sup_{i\in I} \|T_i x\|_F \leq n\} \\ &= \{x \in E;\ \|T_i x\|_F \leq n \quad \forall i \in I\} \\ &= \bigcap_{i\in I} \{x \in E;\ \|T_i x\|_F \leq n\} \\ &= \bigcap_{i\in I} \Phi_n^i; \quad \Phi_n^i = \{x \in E;\ \|T_i x\| \leq n\}. \end{aligned}$$

(1) F_n est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour i fixé, on a

$$\Phi_n^i = \{x \in E;\ T_i x \in \overline{B}(0,n)\} = T^{-1}\left(\overline{B}(0,n)\right).$$

Or, T_i est continu et $\overline{B}(0,n)$ est fermé donc, Φ_n^i est fermé. D'où F_n est fermé comme intersection de fermés.

(2) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = E$.

Soit $x \in E$, alors par (2.2), il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sup_{i\in I} \|T_i x\|_F \leq N$. Donc $x \in F_n \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Ainsi $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = E$.

(3) Application du théorème de Baire.

Puisque E est un espace de Banach, il est métrique et complet. En utilisant le théorème de Baire, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $Int(F_{n_0}) \neq \emptyset$.

(4) Extraction d'une borne uniforme.

Soit $x_0 \in Int(F_{n_0})$, alors, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset F_{n_0}$. Donc, puisque $B_E(x_0, r) = x_0 + rB_E(0,1)$, on a

$$\|T_i(x_0 + ry)\|_F \leq n_0, \quad \forall i \in I, \quad \forall y \in B_E(0,1).$$

Or, par la linéarité de T_i, $i \in I$,

$$\|T_i(x_0 + ry)\|_F = \|T_i(x_0) + rT_i(y)\|_F \geq \left|\|T_i(x_0)\|_F - r\|T_i(y)\|_F\right|.$$

Donc, on a

$$\|T_i(y)\|_F \leq \frac{1}{r}\left(n_0 + \sup_{i\in I}\|T_i(x_0)\|_F\right), \quad \forall y \in B_E(0,1).$$

Ainsi,

$$\sup_{i\in I}\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{i\in I}\sup_{y\in B_E(0,1)}\|T_i(y)\|_F \leq \frac{1}{r}\left(n_0 + \sup_{i\in I}\|T_i(x_0)\|_F\right) < +\infty,$$

et en posant $C = \frac{1}{r}\left(n_0 + \sup_{i\in I}\|T_i(x_0)\|_F\right)$, on obtient (2.4).
Ceci termine la preuve du théorème. □

Corollaire 2.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_n)_n$ une suite d'operateurs linéaires et continus de E dans F telle que pour chaque $x \in E$, la suite $(T_n x)$ converge dans F vers une limite notée Tx. Alors,*

a) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$;

b) $T \in \mathcal{L}(E,F)$;

c) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty}\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Preuve.

a) Pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)$ converge, donc elle est bornée, i. e., $\sup_n \|T_n x\|_F < +\infty$. Il en résulte par le théorème précédent que

$$\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$$

D'où a).

b) De a), il existe $c > 0$ tel que

$$\|T_n x\|_F \leq c\|x\|_E, \quad \forall n, \ \forall x \in E.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient

$$\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

D'autre part, il est clair que T est linéaire, en effet, pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} T(\lambda x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + y) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y)) \\ &= \lambda T(x) + T(y). \end{aligned}$$

D'où b).

c) Pour tout n et tout $x \in E$ on a

$$\|T_n x\|_F \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E.$$

D'après a), la suite $(\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ est bornée, alors $\liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ existe et on obtient

$$\|Tx\|_F = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_F \leq \left(\liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\right) .\|x\|_E.$$

D'où

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

□

2.4 Théorème de l'application ouverte

Théorème 2.4.1 (Théorème de l'application ouverte). *Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un operateur linéaire continu et sujectif de E dans F. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)). \tag{2.5}$$

En conséquence, T est une application ouverte, i.e., pour tout U ouvert de E, $T(U)$ est un ouvert de F.

Preuve.

Etape 1. On pose $F_n = n\overline{T(B_E(0, 1))}$. Comme T est surjectif, on a $F = T(E)$, or $E = \bigcup\limits_{n\geq 1} nB_E(0, 1)$, donc

$$F = T(\bigcup_{n\geq 1} nB_E(0, 1)) = \bigcup_{n\geq 1} nT(B_E(0, 1)) \subset \bigcup_{n\geq 1} n\overline{T(B_E(0, 1))} \subset F,$$

de sorte que $F = \bigcup_{n\geq 1} F_n$. Comme F est complet, par le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Int(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Il en résulte que $Int(\overline{T(B_E(0,1))}) \neq \emptyset$, puisque la multiplication par n_0 est un homéomorphisme. Soit $y \in Int(\overline{T(B_E(0,1))})$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(y,r) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. Comme on a $z \in \overline{T(B_E(0,1))}$ si et seulement si $-z \in \overline{T(B_E(0,1))}$, on en déduit que $B(-y,r) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. Soit $z \in B_F(0,r)$, on a $z = \frac{1}{2}[(z+y)+(z-y)]$, avec $z+y \in B_F(y,r)$ et $z-y \in B_F(-y,r)$. Puisque $\overline{T(B_E(0,1))}$ est convexe, on en déduit que $z \in \overline{T(B_E(0,1))}$. Donc on a $B_F(0,r) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$.

Etape 2. Montrons que pour $c = \frac{r}{2}$, on a

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)).$$

Soit $y \in B_F(0,c)$, alors $2y \in B_F(0,r) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0, \qquad & B_F(0,2y) \cap T(B_E(0,1)) \neq \emptyset \\
\Leftrightarrow \quad & \exists y' \in B_F(0,2y) \ \wedge \ y' \in T(B_E(0,1)) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists y' \in B_F(0,2y) \ \wedge \ \exists z' \in B_E(0,1) \text{ tel que } \ y' = T(z') \\
\overset{z=\frac{z'}{2}}{\Leftrightarrow} \quad & \exists z \in E \text{ tel que } \ \|y - Tz\|_F < \varepsilon \ \wedge \ \|z\| < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On choisi $\varepsilon = \frac{c}{2}$ et on obtient $z_1 \in E$ avec

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \text{ et } \ \|y - Tz_1\|_F < \frac{c}{2}.$$

En appliquant le même procédé avec $y - Tz_1$ au lieu de y et avec $\varepsilon = \frac{c}{4}$, on obtient un $z_2 \in E$ tel que

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \text{ et } \ \|(y - Tz_1) - Tz_2\|_F < \frac{c}{4}.$$

Ainsi de suite, on construit par récurrence une suite (z_n) telle que, pour tout n

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \text{ et } \ \left\| y - T\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\right\|_F < \frac{c}{2^n}.$$

Pour tout $n \geq 1$ on pose $x_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$ et $x = \sum_{n\geq 1} z_n$, alors la suite (x_n) converge vers x dans E ; en effet,

$$\|x_n - x\|_E = \left\|\sum_{i>n} z_i\right\|_E \leq \sum_{i>n} \|z_i\|_E < \sum_{i>n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Puisque l'on a

$$\|x\|_E = \left\| \sum_{n\geq 1} z_n \right\|_E \leq \sum_{n\geq 1} \|z_n\|_E < \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = 1,$$

alors $x \in B_E(0,1)$ et puisque T est continue, on a

$$\|y - Tx\|_F = \lim_{n\to\infty} \left\| y - T\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \right) \right\|_F \leq \lim_{n\to\infty} \frac{c}{2^n} = 0,$$

d'où $y = Tx$. donc on a

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)).$$

$\square$

Remarque 2.4.1. Soient E, F deux espaces normés et $T : E \to F$ une application linéaire ouverte, alors T est surjective. En effet, $T(E)$ est un sous espace vectoriel ouvert de F, donc $T(E) = F$ (puisque un sous espace vectoriel distinct de F est d'intérieur vide).

Corollaire 2.2 (Théorème d'isomorphisme de Banach). *Soit E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et bijectif de E dans F. Alors, T^{-1} est continu de F dans E, i. e., T est un homéomorphisme.*

Preuve.

De la relation (2.5), et puisque T est bijectif, on a

$$T^{-1}(B_F(0,c)) \subset T^{-1}(T(B_E(0,1))) \overset{T\ bijectif}{=} B_E(0,1),$$

c'est à dire que si $\|y\|_F < c$ alors $\|T^{-1}(y)\|_E < 1$.

Soit $z \in F\backslash\{0\}$, alors $\frac{cz}{2\|z\|_F} \in B_F(0,c)$, donc

$$\left\| T^{-1}\left(\frac{cz}{2\|z\|_F} \right) \right\|_E < 1 \Rightarrow \|T^{-1}(z)\|_E < \frac{2}{c}\|z\|_F,$$

et puisque T^{-1} est linéaire, il est continu. $\square$

Corollaire 2.3. *Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on ait $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$. Alors les deux normes sont équivalentes si et seulement si $(E, \|\cdot\|_2)$ est de Banach.*

Preuve.

On applique le corollaire précédent à l'application identité

$$\begin{array}{ccc}(E, \|\cdot\|_1) & \to & (E, \|\cdot\|_2) \\ x & \mapsto & x\end{array}$$

qui est linéaire bijective et continue. $\square$

Théorème 2.4.2 (Théorème du graphe fermé). *Soit E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de E dans F. Alors T est continu si et seulement si son graphe*

$$G(T) = \{(x, y) \in E \times F;\ y = Tx\} = \{(x, Tx);\ x \in E\}$$

est fermé dans l'espace de Banach $E \times F$.

Preuve.

Supposons d'abord que T est continu, et montrons que $G(T)$ est fermé dans l'espace normé produit $E \times F$. Soit $(x, y) \in \overline{G(T)}$, comme $E \times F$ est un espace normé, alors il existe une suite $(x_n, T(x_n))_{n\geq 0}$ dans $E \times F$ qui converge vers (x, y). D'où,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y.$$

Or, T est continu en x, alors on a $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = Tx$. Par unicité de la limite dans un espace topologique séparé, on a $Tx = y$, d'où $(x, y) \in G(T)$. Par conséquent, on a $\overline{G(T)} = G(T)$, donc $G(T)$ est une partie fermée de $E \times F$.

Réciproquement, supposons que $G(T)$ est fermé dans $E \times F$. On définit sur E une deuxième norme $\|\cdot\|_T$ par

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F, \quad \forall x \in E.$$

On a $\|x\|_E \leq \|x\|_T$, pour tout $x \in E$. D'autre part, comme $G(T)$ est fermé dans $E \times F$, $(E, \|\cdot\|_T)$ est complet. En effet, soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_T)$, alors $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(Tx_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Comme $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont de Banach, $(x_n)_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|_E)$ vers un certain $x \in E$ et $(Tx_n)_n$ converge dans $(F, \|\cdot\|_F)$ vers un certain $y \in F$. Or, $G(T)$ est fermé dans $E \times F$, cela entraine que $y = Tx$. Par conséquent, $(x_n)_n$ converge vers un x dans $(E, \|\cdot\|_T)$. D'où, $(E, \|\cdot\|_T)$ est complet.

En utilisant le Corollaire 2.3, les deux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_T$ sont équivalentes et il existe $C > 0$ tel que

$$\|x\|_T \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E,$$

soit

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

D'où le résultat. $\square$

2.5 Théorème de Hahn-Banach

2.5.1 Forme analytique : prolongement des formes linéaires

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Le résultat suivant concerne le prolongement d'une forme linéaire définie sur un sous espace vectoriel de E en une forme linéaire définie sur E tout entier.

Théorème 2.5.1 (Hahn-Banach, forme analytique). *Soit $p : E \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant*

$$(p \text{ positivement homogène})\ p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E \text{ et } \forall \lambda > 0, \tag{2.6}$$

et

$$(p \text{ sous-additive})\ p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \tag{2.7}$$

Soit G un sous espace vectoriel de E et $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G. \tag{2.8}$$

Alors, il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g, i.e.,

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in G,$$

et telle que

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E. \tag{2.9}$$

Pour la preuve de ce théorème, nous aurons besoin du Lemme de Zorn.

Commençons tout d'abord par préciser quelques notions de la théorie des ensembles ordonnés.

Soit X un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ sur X s'appelle **relation d'ordre** si elle satisfait aux axiomes suivants.

1. $\mathcal{R}$ **est réflexive**, i. e., $\forall x \in X,\ x\mathcal{R}x$;
2. $\mathcal{R}$ **est anti-symétrique**, i. e., $\forall x, y \in X,\ x\mathcal{R}y \wedge\ y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$;
3. $\mathcal{R}$ **est transitive**, i. e., $\forall x, y, z \in X,\ x\mathcal{R}y \wedge\ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Elle est souvent notée $\leq$.
X muni d'une relation d'ordre $\leq$ est appelé **ensemble ordonné**, on le note $(X, \leq)$.

Exemple 2.5.1. $(\mathbb{R}, \leq)$ *et* $(\mathcal{P}, \subset)$ *sont des ensembles ordonnés.*

Soit X un ensemble ordonné et $A \subset X$.

- On dit que A est **totalement ordonné** si $\forall x, y \in A,\ x \leq y$ ou bien $y \leq x$ (x et y sont comparables).

Exemple 2.5.2. $(\mathbb{R}, \leq)$ *est totalement ordonné.*

- On dit que $M \in X$ est un **majorant** de A si $\forall x \in A;\ x \leq M$.
- On dit que $M \in A$ est un **élément maximal** de A si $\forall x \in A$ tel que $M \leq x$ on a $x = M$.
- On dit que X est **inductif** si tout sous ensemble totalement ordonné de X admet un majorant.

Lemme 2.1 (Zorn). *Tout ensemble ordonné, inductif et non vide admet un élément maximal.*

Preuve du Théorème 2.5.1.

On considère l'ensemble

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{array}{l} h;\ h : D(h) \subset E \to \mathbb{R} \text{ avec } D(h) \text{ s.e.v de } E,\ h \text{ linéaire,} \\ G \subset D(h),\ h \text{ prolonge } g \ \text{ et } \ h(x) \leq p(x),\ \forall x \in D(h) \end{array} \right\}.$$

On munit $\mathcal{X}$ de la relation $\leq$ définie par

$$(h_1 \leq h_2) \Leftrightarrow (D(h_1) \subset D(h_2) \text{ et } h_1 \text{ prolonge } h_2).$$

Il est clair que $\mathcal{X}$ n'est pas vide, car $g \in \mathcal{X}$.

Montrons que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{X}$.

1. $\forall h \in \mathcal{X}$, $D(h) \subset D(h)$ et h se prolonge, donc $h \leq h$. D'où, $\leq$ est réflexive.

2. $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} h_1 \leq h_2 \text{ et } h_2 \leq h_1 \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_1 = h_2 \text{ sur } D(h_1) \end{cases} \text{et} \begin{cases} D(h_2) \subset D(h_1) \\ h_2 = h_1 \text{ sur } D(h_2) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} D(h_1) = D(h_2) \\ h_1 = h_2 \text{ sur } D(h_1) \end{cases} \Rightarrow h_1 = h_2 \end{aligned}$$

Donc, $\leq$ est anti-symétrique.

3. $\forall h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} h_1 \leq h_2 \text{ et } h_2 \leq h_3 \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_1(x) = h_2(x) \ \forall x \in D(h_1) \end{cases} \text{et} \begin{cases} D(h_2) \subset D(h_3) \\ h_2(x) = h_3(x) \ \forall x \in D(h_2) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_3) \\ h_1(x) = h_3(x) \ \forall x \in D(h_1) \end{cases} \Rightarrow h_1 \leq h_3 \end{aligned}$$

Donc, $\leq$ est transitive.

De 1., 2. et 3., $(\mathcal{X}, \leq)$ est un ensemble ordonné.

Montrons que $\mathcal{X}$ est inductif.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ un sous-ensemble totalement ordonné, on note $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \{h_i\}$. On définit $h : D(h) \subset E \to \mathbb{R}$ comme suit

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i)$$

et

$$h(x) = h_i(x) \quad \text{si} \quad x \in D(h_i), \quad \forall i \in I.$$

On vérifie que cette définition a bien un sens, que $h \in \mathcal{X}$ et que h est un majorant de $\mathcal{A}$.

En effet, comme $\mathcal{A}$ est totalement ordonné, pour tous $h_1, h_2 \in \mathcal{A}$, h_1 et h_2 sont comparables.

Soit $x \in D(h)$, alors, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in D(h_{i_0})$.

Si $i_1, i_2 \in I$ tels que $x \in D(h_{i_1})$ et $x \in D(h_{i_2})$, alors

$$h(x) = h_{i_1}(x), \ \forall x \in D(h_{i_1})$$

et

$$h(x) = h_{i_2}(x) \ \forall x \in D(h_{i_2}).$$

Or, h_{i_1} et h_{i_2} sont comparables, c'est à dire, soit $h_{i_1} \leq h_{i_2}$ ou bien $h_{i_2} \leq h_{i_1}$. Supposons que $h_{i_1} \leq h_{i_2}$, alors $D(h_{i_1}) \subset D(h_{i_2})$ et $h_{i_1}(x) = h_{i_2}(x) = h(x)$, pour tout $x \in D(h_{i_1}) \cap D(h_{i_2}) = D(h_{i_1})$, d'où h est bien défini.

Pour montrer que $h \in \mathcal{X}$, on commence à montrer que $D(h)$ est un sous espace vectoriel de E. Soit $x, y \in D(h)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, il existe $i_1, i_2 \in I$ tels que $x \in D(h_{i_1})$ et $y \in D(h_{i_2})$. Or, $h_{i_1} h_{i_2} \in \mathcal{A}$, donc elles sont comparables, d'où $D(h_{i_1}) \subset D(h_{i_2})$ ou bien $D(h_{i_2}) \subset D(h_{i_1})$, c'est à dire, il existe $j \in \{i_1, i_2\}$ tel que $x, y \in D(h_j)$ et comme $D(h_j)$ est un sous espace vectoriel de E, on a $\lambda x + y \in D(h_j) \subset D(h)$. Par conséquent, $D(h)$ est un sous espace vectoriel de E. De plus,

$$h(\lambda x + y) = h_j(\lambda x + y) = \lambda h_j(x) + h_j(y) = \lambda h(x) + h(y).$$

D'où h est linéaire, et on a : $G \subset D(h_j) \subset D(h)$ et $h(x) = h_{i_1}(x) = g(x)$. Donc h prolonge g et $h(x) = h_{i_1}(x) \leq p(x)$. Par conséquent, $h \in \mathcal{X}$.

Finalement, pour tout $i \in I$, $D(h_i) \subset D(h)$ et h prolonge h_i, D'où h est un majorant de $\mathcal{A}$. Ainsi $\mathcal{X}$ est inductif. En vertu du lemme de Zorn, $\mathcal{X}$ admet un élément maximal f.

Pour terminer la preuve, on montre que $D(f) = E$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $D(f) \neq E$. Soit $x_0 \notin D(f)$. On définit $h : D(h) \subset E \to \mathbb{R}$ par

$$D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$$

et

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha, \quad \forall x \in D(f), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

où α est une constante qui sera fixé ultérieurement de manière à ce que $h \in \mathcal{X}$. Il est facile de vérifier que $D(h)$ est un sous espace vectoriel de E qui contient G et que h est une forme linéaire qui prolonge g (puisque $f \in \mathcal{X}$). On doit donc s'assurer que

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0), \quad \forall x \in D(f), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Grâce à (2.6), il suffit de vérifier que

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \end{cases} \forall x \in D(f).$$

En effet, on aura alors

$$f(x)+t\alpha = \begin{cases} t(f(\frac{x}{t})+\alpha) \leq tp(\frac{x}{t}+x_0) = p(x+tx_0), & \text{si } t>0, \\ (-t)(f(\frac{-x}{t})-\alpha) \leq (-t)p(-\frac{x}{t}-x_0) = p(x+tx_0), & \text{si } t<0, \end{cases}$$

(et si $t=0$: $f(x) \leq p(x)$ car $f \in \mathcal{X}$). Il suffit donc de choisir α tel que

$$\sup_{y\in D(f)} \Big(f(y)-p(y-x_0)\Big) \leq \alpha \leq \inf_{x\in D(f)} \Big(p(x+x_0)-f(x)\Big).$$

Un tel choix est possible car de (2.7) on a (puisque f est linéaire), pour tous $x, y \in D(f)$

$$\begin{aligned} f(x)+f(y) &= f(x+y) \\ &\leq p(x+y) \\ &\leq p(x+x_0)+p(y-x_0). \end{aligned}$$

D'où

$$f(y)-p(y-x_0) \leq p(x+x_0)-f(x), \quad \forall x, y \in D(f).$$

Alors,

$$\sup_{y\in D(f)} \Big(f(y)-p(y-x_0)\Big) \leq \inf_{x\in D(f)} \Big(p(x+x_0)-f(x)\Big).$$

On conclut que f est majorée par $h \in \mathcal{X}$ et que $f \neq h$, ceci contredit la maximalité de f $\square$

Théorème 2.5.2 (Hahn-Banach, forme analytique). *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit $p : E \to \mathbb{R}_+$ une application positivement homogène et sous-additive. Soit G un sous espace vectoriel de E et $g : G \to \mathbb{K}$ une application linéaire telle que*

$$|g(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in G. \tag{2.10}$$

Alors, il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g, i.e.,

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in G,$$

et telle que

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in E. \tag{2.11}$$

Corollaire 2.4. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, soit G un sous-espace vectoriel de E et $g : G \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe $f \in E'$ (i.e., une forme linéaire continue sur E) qui prolonge g tel que*

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Preuve.

Définissons la fonction $p : E \to \mathbb{R}_+$ par

$$p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Alors, p vérifie (2.6) et (2.7). En effet, pour tout $x, y \in E$ et $\lambda > 0$, on a

$$p(\lambda x) = \|g\|_{G'}\|\lambda x\| \overset{\lambda \geq 0}{=} \lambda\|g\|_{G'}\|x\| = \lambda p(x),$$

$$p(x+y) = \|g\|_{G'}\|x+y\| \leq \|g\|_{G'}\|x\| + \|g\|_{G'}\|y\| = p(x) + p(y).$$

De plus (2.10) et vérifiée. En effet, pour tout $x \in G$, on a

$$|g(x)| = \left| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \|x\| \overset{x \in \overline{B}_G(0,1)}{\leq} \|g\|_{G'}\|x\| = p(x).$$

Donc, en appliquant le Théorème 2.5.2, il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g et telle que

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Or, si $x \in \overline{B}_E(0,1)$, on aura

$$|f(x)| \leq p(x) = \|g\|_{G'}.$$

D'où, $\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}$. D'autre part, comme f prolonge g, on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in G$, donc

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x \in \overline{B}_G(0,1)} |g(x)| = \sup_{x \in \overline{B}_G(0,1)} |f(x)| \overset{G \subset E}{\leq} \sup_{x \in \overline{B}_E(0,1)} |f(x)| = \|f\|_{E'}.$$

En combinant les deux inégalités on obtient $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$. $\square$

Corollaire 2.5. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que*

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\| \quad \textit{et} \quad \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

Preuve.

Soit $x_0 \in E\backslash\{0_E\}$. Posons $G = \mathbb{K}x_0 = \{tx_0;\ t \in \mathbb{K}\}$ et définissons $g : G \to \mathbb{K}$ par

$$g(tx_0) = t\|x_0\|^2,\ \forall t \in \mathbb{K}.$$

ll est clair que g et linéaire et continue. En effet, pour tous $t, t', \lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$g(\lambda tx_0 + t'x_0) = g((\lambda t + t')x_0) = (\lambda t + t')\|x_0\|^2 = \lambda t\|x_0\|^2 + t'\|x_0\|^2 = \lambda g(tx_0) + g(t'x_0),$$

et $|g(tx_0)| = \|x_0\|.\|tx_0\|$. Calculons sa norme,

$$\|g\|_{G'} = \sup_{\|tx_0\|\leq 1} |g(tx_0)| = \sup_{\|tx_0\|\leq 1} \|x_0\|.\|tx_0\| \leq \|x_0\|.$$

Or, pour $t = \frac{1}{\|x_0\|}$, on a $g(tx_0) = \|x_0\|$, d'où $\|g\|_{G'} = \|x_0\|$.

Par le Corollaire 2.4, il existe un prolongement $f_0 \in E'$ de g tel que

$$\|f_0\|_{E'} = \|g\|_{G'} = \|x_0\|.$$

En particulier, puisque $x_0 \in G$, on a $\langle f_0, x_0\rangle = g(x_0) = \|x_0\|^2$.

Pour $x_0 = 0_E$, il suffit de prendre $f_0 = 0$. □

Corollaire 2.6. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace normé. Pour tout* $x \in E$*,*

$$\|x\| = \sup_{f\in\overline{B}_{E'}(0,1)} |\langle f, x\rangle| = \max_{f\in\overline{B}_{E'}(0,1)} |\langle f, x\rangle|.$$

Preuve.

Si $x = 0_E$, l'égalité est évidente.

Soit $x_0 \in E\backslash\{0_E\}$. Pour tout $f \in E'$ on a

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{E'}\|x\|.$$

Ainsi, pour tout $f \in \overline{B}_{E'}(0, 1)$,

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|x\|.$$

D'où

$$\sup_{f\in\overline{B}_{E'}(0,1)} |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|,$$

et par le corollaire précédent, il existe $f_0 \in E'$ tel que

$$\|f_0\|_{E'} = \|x\| \quad \text{et} \quad \langle f_0, x\rangle = \|x\|^2.$$

On pose $f_1 = \frac{1}{\|x\|} f_0$, alors on a $\|f_1\| = 1$ et

$$\langle f_1, x\rangle = \langle \frac{1}{\|x\|} f_0, x\rangle = \frac{1}{\|x\|}\langle f_0, x\rangle \|x\|.$$

D'où, $\|x\| = \max\limits_{f\in \overline{B}_{E'}(0,1)} |\langle f, x\rangle|$. $\square$

Corollaire 2.7. *Soit G un espace de Banach et soit B un sous ensemble de G. On suppose que*

$$\forall f \in G',\ \textit{L'ensemble } f(B) = \bigcup_{x\in B}\{\langle f, x\rangle\} \textit{ est borné dans } \mathbb{R}.$$

Alors, B est borné.

Preuve.

On applique le Théorème 2.3.1 avec $E = G'$, $F = \mathbb{K}$ et $I = B$.

Pour chaque $b \in B$, on pose $T_b f = \langle f, b\rangle$, $f \in G'$. Il est clair que, pour chaque $b \in B$, $T_b \in E' = G''$. De plus, puisque $f(B)$ est borné pour tout $f \in G'$, on a

$$\sup_{b\in B} |T_b(f)| = \sup_{b\in B} |\langle f, b\rangle| < \infty.$$

Alors, par le Théorème 2.3.1, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|\langle f, b\rangle| \le c\|f\|_{G'}, \quad \forall f \in G',\ \forall b \in B.$$

Par le corollaire 2.7, pour chaque $b \in B$, on a

$$\|b\|_G = \sup_{\substack{f\in G'\\ \|f\|_{G'}\le 1}} |\langle f, b\rangle| \le \sup_{\substack{f\in G'\\ \|f\|_{G'}\le 1}} c\|f\|_{G'} = c.$$

D'où B est borné. $\square$

2.5.2 Formes géométriques : séparation des ensembles convexes

On commence par quelques préliminaires sur les hyperplans.

Soit E un espace vectoriel normé réel.

Définition 2.5.1. *Un **hyperplan (affine)** est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in E;\ f(x) = \alpha\},$$

où f est une forme linéaire sur E non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$.

*On dit que H est un **hyperplan d'équation** $[f = \alpha]$.*

Proposition 2.5.3. *L'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si seulement si f est continue.*

Pour la preuve de cette proposition on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.5.4. *Soit E et F deux espaces vectoriels nommés. Une application linéaire T et continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité de E.*

Preuve de la Proposition 2.5.3.

Il est clair que si f est continue alors $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ est fermé.

Réciproquement, supposons que H est fermé. Le complémentaire de H, C_E^H est un ouvert non vide (comme $f \neq 0_{E'}$, il existe $v_0 \in E$ tel que $f(v_0) \neq 0$, alors $\{f(tv_0);\ t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, donc pour $c \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $c = f(tv_0)$ donc $tv_0 \in C_E^H$). Soit $x_0 \in C_E^H$, alors $f(x_0) \neq \alpha$. Supposons que $f(x_0) < \alpha$ (si $f(x_0) > \alpha$, on prend $(-f)$ au lieu de f). Comme C_E^H est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset C_E^H$. Montrons que

$$f(x) < \alpha, \forall x \in B(x_0, r). \tag{2.12}$$

En effet, supposons le contraire, alors, il existe $x_1 \in B(x_0, r)$ tel que $f(x_1) > \alpha$. Posons $x_t = (1-t)x_0 + tx_1,\ t \in [0,1]$. Le segment $[x_0, x_1] = \{x_t;\ t \in [0,1]\}$ et contenu dans $B(x_0, r)$ (puisqu'elle est convexe) et donc $f(x_t) \neq \alpha$, pour tout $t \in [0,1]$. Or, $f(x_t) = \alpha$ pour $t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$, c'est à dire, $x_t \in H$, contradiction. Donc (2.12) est démontré. Il résulte de (2.12) que

$$f(x_0 + rz) < \alpha, \quad \forall z \in B(0,1),$$

(car $B(x_0, r) = x_0 + rB(0,1)$). D'où, $f(z) < \frac{\alpha - f(x_0)}{r}$.

En changeant z en $-z$, on en déduit que

$$|f(z)| < \frac{\alpha - f(x_0)}{r},$$

c'est à dire que f bornée sur la boule unité. Par conséquent, f est continue. On en déduit que $f \in E'$ et $\|f\|_{E'} \leq \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$. □

Définition 2.5.2. *Sois A et B deux sous ensembles de E. On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$* ***sépare** A **et** B **au sens large*** *si l'on a*

$$f(x) \leq \alpha,\ \forall x \in A \quad et \quad f(x) \geq \alpha,\ \forall x \in B.$$

On dit que H ***sépare** A **et** B **au sens strict*** *si il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon,\ \forall x \in A \quad et \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon,\ \forall x \in B.$$

Théorème 2.5.5 (Hahn-Banach, première forme géométrique). *Sois A et B deux sous ensembles convexes, non vides et disjoints de E. On suppose que A est ouvert. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.*

La preuve du Théorème 2.5.5 est basée sur les deux lemmes suivants.

Lemme 2.2 (Jauge d'un convexe). *Soit C un sous ensemble convexe ouvert de E avec $0_E \in C$. Pour tout $x \in E$, on pose*

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0;\ \alpha^{-1}x \in C\}.$$

On dit que $p : E \to \mathbb{R}_+$ est ***le jauge*** *de C ou bien* ***la fonctionnelle de Minkowski de*** *C. Alors,*

1. *p vérifie (2.6) et (2.7) ;*
2. *il existe $M > 0$ tel que*
$$0 \leq p(x) \leq M\|x\|, \quad \forall x \in E;$$
3. *p est continue ;*
4. *$C = \{x \in E;\ p(x) < 1\}$.*

Preuve.

1. Soit $x \in E$ et $\lambda > 0$. On a

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf\{\alpha > 0;\ \alpha^{-1}\lambda x \in C\} \\ &= \inf\{\alpha > 0;\ \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{-1} x \in C\} \\ &\overset{\beta=\frac{\alpha}{\lambda}}{=} \inf\{\lambda\beta > 0;\ \beta^{-1}x \in C\} \\ &\overset{\lambda>0}{=} \lambda \inf\{\beta > 0;\ \beta^{-1}x \in C\} \\ &= \lambda p(x). \end{aligned}$$

Soit $x, y \in E$. On prend $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha^{-1}x \in C \quad \text{et} \quad \beta^{-1}y \in C.$$

Puisque C est convexe et $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \in]0,1[$, on a

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\alpha^{-1}x + (1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta})\beta^{-1}y \in C.$$

Or,

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\alpha^{-1}x + (1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta})\beta^{-1}y = \frac{x+y}{\alpha+\beta},$$

donc $\frac{x+y}{\alpha+\beta} \in C$. Ceci montre que

$$\{\alpha > 0;\ \alpha^{-1}x \in C\} + \{\beta > 0;\ \beta^{-1}y \in C\} \subset \{\gamma > 0;\ \gamma^{-1}(x+y) \in C\},$$

et donc, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

2. Comme $0_E \in C$, on a $p(0_E) = 0$, de plus C est ouvert, alors il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r) \subset C$.

   Or, pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$ on a $r\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}(0,r) \subset C$ et donc $\frac{\|x\|}{r} \in \{\alpha > 0;\ \alpha^{-1}x \in C\}$, c'est à dire,

$$0 \leq p(x) \leq \frac{\|x\|}{r}.$$

   Ce qui montre 2. avec $M = \frac{1}{r}$.

3. Soit $x, y \in E$. Par la sous additivité de p on a

$$p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y) + p(y) \quad \text{et} \quad p(y) = p(y-x+x) \leq p(y-x) + p(x)$$

   D'où

$$p(x) - p(y) \leq p(x-y) \quad \text{et} \quad p(y) - p(x) \leq p(y-x).$$

   Donc, par 2., on a

$$|p(x) - p(y)| \leq \max\{p(x-y), p(y-x)\} \leq M\|x-y\|.$$

   Par conséquent, p est de Lipschitz, d'où 3..

4. Soit $x \in C \backslash \{0_E\}$. Comme C est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(x,r) \subset C$. Or,

$$\overline{B}(x,r) = x + r\overline{B}(0,1) \quad \text{et} \quad \frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}(0,1),$$

   alors pour $\varepsilon = \frac{r}{\|x\|}$, on a $(1+\varepsilon)x \in C$. Donc, $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Si $x = 0_E$, alors $p(0_E) = 0 < 1$.

   Réciproquement, si $p(x) < 1$, alors il existe $\alpha \in]0,1[$ avec $\frac{x}{\alpha} \in C$. Mais

$$x = (1-\alpha) \cdot 0_E + \alpha \cdot \frac{x}{\alpha}$$

   et donc $x \in C$ car C est convexe.

$\square$

Lemme 2.3. *Soit $C \subset E$ convexe ouvert et non vide et soit $x_0 \in E$ avec $x_0 \notin C$. Alors, il existe $f \in E'$ telle que*

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in C.$$

En particulier l'hyperplane d'équation $[f = f(x_0)]$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Preuve.

Soit $y_0 \in C$. Par translation par $-y_0$, on se ramène au cas $0_E \in C$. Donc, on peut introduire le jauge de C noté p. On considère $G = \mathbb{R}x_0$ et la forme linéaire g définie sur G par

$$g(tx_0) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Montrons que

$$g(tx_0) \leq p(tx_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $t \leq 0$, l'inégalité et évidente car $p(tx_0) \geq 0$.
Si $t = 1$, alors $g(x_0) = 1$, et puisque $x_0 \notin C$, d'après (iv) du lemme précédent, $g(x_0) = 1 \leq p(x_0)$. Enfin, si $t > 0$, alors

$$g(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0).$$

Grâce au Théorème 2.5.1, il existe une forme linéaire f sur E, qui prolonge g et telle

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

En particulier, $f(x_0) = g(x_0) = 1$ et par le lemme précédent (ii), il existe $M > 0$ tel que

$$f(x) \leq M\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Donc f est continue, ce qui montre que $f \in E'$ et pour tout $x \in C$, par (iv), on a

$$f(x) \leq p(x) < 1 = f(x_0).$$

$\square$

Preuve du Théorème 2.5.5.

Soit

$$C = A - B = \{a - b;\ a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

• <u>C **est un ouvert.**</u> On a $C = \bigcup_{b \in B} (A - b)$ et chaque $A - b$ est un ouvert, donc C est ouvert comme union quelconque d'ouverts.

• <u>C **est un convexe.**</u> Soit $x, y \in C$ et $t \in [0,1]$, il existe $a_1, a_2 \in A$ et $b_1, b_2 \in B$ tels que $x = a_1 - b_1$ et $y = a_2 - b_2$. Alors,

$$tx + (1-t)y = (ta_1 + (1-t)a_2) - (tb_1 + (1-t)b_2) \in A - B,$$

car A et B sont convexes.

• <u>$0_E \notin C$**.**</u> Par contraposition, si $0_E \in C$, alors il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $0_E = a - b$. Donc, $a = b$, c'est à dire, $A \cap B \neq \emptyset$.

Par le lemme précédent, il existe $f \in E'$ telle que

$$f(z) < f(0) = 0, \quad \forall x \in C.$$

Par conséquent,

$$f(a) < f(b), \quad \forall (a,b) \in A \times B.$$

Posons $\alpha = \sup_{a \in A} f(a)$ (ou bien $\alpha = \inf_{b \in B} f(b)$), on a donc

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b), \quad \forall (a,b) \in A \times B,$$

et donc, l'hyperplan fermé H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large. □

Théorème 2.5.6 (Hahn-Banach, deuxième forme géométrique). *Soit A et B deux sous ensembles de E convexes, non vides et disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.*

Preuve.

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$. On a

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} (a + B(0, \varepsilon))$$

et

$$B_\varepsilon = \bigcup_{b \in B} (b + B(0, \varepsilon)).$$

Alors A_ε et B_ε sont ouverts. De plus, puisque A, B et $B(0,\varepsilon)$ sont convexes et non vides, $A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$ le sont aussi.

D'autre part, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $A_{\varepsilon_0} \cap B_{\varepsilon_0} = \emptyset$. *En effet*, si on suppose le contraire, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \neq \emptyset,$$

en particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (a_n, b_n) \in A \times B,\ \exists u_n, v_n \in B(0,1);\ a_n + \frac{1}{n}u_n = b_n + \frac{1}{n}v_n \in A_{\frac{1}{n}} \cap B_{\frac{1}{n}}.$$

Comme B et compact, on peut extraire à (b_n) une sous suite notée $(b_{\varphi(n)})$ qui convergent vers $b \in B$, de plus, puisque la suite $(\frac{1}{n})$ converge vers 0 et les deux suites (u_n) et (v_n) sont bornées, les deux suites $(\frac{1}{n}u_n)$ et $(\frac{1}{n}v_n)$ convergent vers 0_E. Donc, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{\varphi(n)} = b_{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n)}v_{\varphi(n)} - \frac{1}{\varphi(n)}u_{\varphi(n)}$, la suite $(a_{\varphi(n)})$ converge aussi vers b. Or, A est fermé, par conséquent $b \in A$, ce qui est absurde car $A \cap B = \emptyset$.

En utilisant le Théorème 2.5.5, il existe un hyperplan fermé $[f = \alpha]$ qui sépare A_{ε_0} et B_{ε_0} au sens large. On a donc

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y), \quad \forall (x,y) \in A_{\varepsilon_0} \times B_{\varepsilon_0}.$$

Or, pour tout $(a,b) \in A \times B$ et tout $u \in B(0,1)$ on a $a + \varepsilon_0 u \in A_{\varepsilon_0}$ et $b - \varepsilon_0 u \in B_{\varepsilon_0}$. Alors

$$f(a + \varepsilon_0 u) \leq \alpha \leq f(b - \varepsilon_0 u), \quad \forall (a,b) \in A \times B, \quad \forall u \in B(0,1)$$

et comme f est linéaire, on aura

$$f(a) + \varepsilon_0 f(u) \leq \alpha \leq f(b) - \varepsilon_0 f(u), \quad \forall (a,b) \in A \times B, \quad \forall u \in B(0,1).$$

Il suite que,

$$f(a) + \varepsilon_0 \|f\|_{E'} \leq \alpha \leq f(b) - \varepsilon_0 \|f\|_{E'}, \quad \forall (a,b) \in A \times B.$$

On conclut que A et B sont séparés au sens strict par l'hyperplan $[f = \alpha]$ puisque $\|f\|_{E'} \neq 0$.

$\square$

Corollaire 2.8. *Soit $G \subset E$ un sous espace vectoriel tel que $\overline{G} \neq E$. Alors, il existe $f \in E' \backslash \{0_{E'}\}$ tel que $\langle f, x \rangle = 0$, pour tout $x \in G$.*

Preuve.

Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \overline{G}$. On applique le théorème prédédent avec $A = \overline{G}$ et $B = \{x_0\}$. Donc, il existe $f \in E' \backslash \{0\}$ tel que l'hyperplan fermé d'équation $[f = \alpha]$ sépare au sens strict $\overline{G}$ et $\{x_0\}$. Par suite

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle, \quad \forall x \in G.$$

Puisque G est un sous espace vectoriel, on a $\langle f, 0 \rangle = 0 < \alpha$ et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\langle f, \pm \frac{1}{\varepsilon} x \rangle < \alpha, \quad \forall x \in G.$$

Donc

$$|\langle f, x \rangle| < \varepsilon \alpha, \quad \forall x \in G, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D'où $\langle f, x \rangle = 0$, pour tout $x \in G$. $\square$

2.6 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Soit (X, d_1) et (Y, d_2) deux espaces métriques et on note par $C(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y.

Rappelons que $C(X, Y)$ est muni de la distance

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_2(f(x), g(x)), \ \forall f, g \in C(X, Y).$$

La topologie associée à d_∞ est notée τ_{cu} et appelée la topologie de la convergence uniforme. On va voir dans cette section des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une partie K de $(C(X, Y), d_\infty)$ soit relativement compacte. C'est la notion d'équicontinuité qui va nous en fournir une classe importante.

Définition 2.6.1 (Équicontinuité). *Soit K un sous ensemble de $C(X, Y)$. On dit que K est équicontinu si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0, \ \forall f \in K, \ \forall x, y \in X \ \text{avec} \ d_1(x, y) < \eta, \ \text{on a} \ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Exemple 2.6.1.
1. *Si $k > 0$, alors l'ensembles des applications k-lipschitziennes d'un espace métrique dans un autre est équicontinu.*
2. *Soient $X = [a, b]$, $Y = \mathbb{R}$, $k > 0$ et*

$$K = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, \ \text{dérivable telle que} \ |f'(t)| \leq k \ \text{pour tout} \ t \in]a, b[\}.$$

Alors K est sous ensemble équicontinu de $C([a, b], \mathbb{R})$.

Théorème 2.6.1 (d'Ascoli-Arzelà). *On suppose que X est compact et Y est complet. Soit K un sous ensemble de $C(X, Y)$. Alors, K est relativement compact si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

1. *Pour tout $x \in X$, l'ensemble $K(x) = \{f(x);\ f \in K\}$ est relativement compact dans Y.*
2. *K est équicontinu.*

Corollaire 2.9. *On suppose que X est compact et Y est complet et soit $(f_n)_n \subset C(X, Y)$ une suite équicontinue (i. e., l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu). Alors, si $(f_n)_n$ converge simplement vers une application f, alors elle converge uniformément vers f. En particulier, f est continue.*

CHAPITRE 3

Topologies faibles, Espaces réflexifs

3.1 Topologie initiale

Soient X un espace topologique et $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $\varphi_i : X \to Y_i$ une application.

La topologie discrète sur X rends continues toutes les applications φ_i, mais on cherche ici à construire la topologie τ la moins fine sur X rendant continues toutes les applications φ_i (c'est à dire, construire la topologie τ sur X avec le minimum d'ouverts, la topologie la plus économiques, qui rend continue toues les φ_i, $i \in I$).

Soit O_i^α un ouvert de Y_i, alors $\varphi_i^{-1}(O_i^\alpha)$ est un ouvert pour la topologie τ (car φ_i est continue).

Lorsque O_i^α décrit τ_i et que i décrit I, les $\varphi_i^{-1}(O_i^\alpha)$ constituent une famille de sous ensembles de X qui sont ouverts pour la topologie τ. Notons cette famille par $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ où $U_\lambda = \varphi_i^{-1}(O_i^\alpha)$.

Proposition 3.1.1. *Soit τ une famille de sous ensembles de X telle que*

$$\tau = \left\{ \bigcup_{qque} \bigcap_{finie} U_\lambda;\ \lambda \in \Lambda \right\}.$$

Alors, τ est une topologie sur X appelée la topologie initiale. De plus, c'est la topologie la moins fine sur X qui rend continues toutes les applications φ_i, $i \in I$.

Preuve.

- On a, $X = \varphi_i^{-1}(Y_i) \in \tau$ et $\emptyset = \varphi_i^{-1}(\emptyset) \in \tau$.
- Il est clair que τ est stable par union quelconque.
- Pour montrer que τ est stable par intersection finie, on a besoin du lemme suivant

  Lemme 3.1. *Soit F un ensemble fini, $(J_i)_{i\in F}$ une famile d'ensembles quelconques, alors*
  $$\bigcap_{i\in F}\bigcup_{j\in J_i} A_j = \bigcup_{\psi\in\mathcal{F}}\bigcap_{i\in F} A_{\psi(i)},$$
  où $\mathcal{F}$ est l'ensemle de toutes les applications $\psi : i \in F \mapsto \psi(i) \in J_i$.

  Revenons à la preuve de la Proposition 3.1.1.

  Du Lemme 3.1, pour rour $(A_i)_{i\in F} \subset \tau$, F fini, on a pour tout $i \in F$, $A_i = \bigcup_{qque}\bigcap_{finie} U_\lambda^i$, donc
  $$\bigcap_{i\in F} A_i = \bigcup_{qque}\bigcap_{i\in F}\bigcap_{finie} U_\lambda^i \in \tau.$$

D'où τ est une topologie sur X.

Montrons que τ est la topologie la moins fine sur X rendant les applications $(\varphi_i)_{i\in I}$ continues.

Considérons une autre topologie τ' telle que toutes les applications φ_i soient continues pour τ'. Soit O_i^α un ouvert quelconque de Y_i, alors $\varphi_i^{-1}(O_i^\alpha) \in \tau'$ et comme τ' est une topologie sur X, elle est stable par intersection finie et réunion quelconque, et donc,
$$\bigcup_{qque}\bigcap_{finie} \varphi_i^{-1}(O_i^\alpha) \in \tau'.$$

Ainsi, tout ouvert pour τ est un ouvert pour τ', ce qui montre que τ est une topologie moins fine que τ'. □

Exemple 3.1.1. *Soient (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) deux espaces topologiques, $X = X_1 \times X_2$ et*
$$\begin{array}{rcl} \varphi_i = Proj_{X_i} : X & \to & X_i \\ x = (x_1, x_2) & \mapsto & Proj_{X_i}(x) = x_i \end{array}, i = 1, 2.$$
Pour tout $O_i^\alpha \in \tau_i$, on a
$$\varphi_1^{-1}(O_1^\alpha) = \{x = (x_1, x_2) \in X : \ \varphi_1(x) \in O_i^\alpha\} = O_1^\alpha \times X_2,$$
et
$$\varphi_2^{-1}(O_2^\alpha) = \{x = (x_1, x_2) \in X : \ \varphi_2(x) \in O_i^\alpha\} = X_1 \times O_2^\alpha.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\bigcap_{finie} \varphi_i^{-1}(O_i^\alpha) &= \left(\bigcap_{finie} \varphi_1^{-1}(O_1^\alpha)\right) \cap \left(\bigcap_{finie} \varphi_2^{-1}(O_2^\alpha)\right) \\
&= \left(\bigcap_{finie} (O_1^\alpha \times X_2)\right) \cap \left(\bigcap_{finie} (X_1 \times O_2^\alpha)\right) \\
&= \left(\bigcap_{finie} O_1^\alpha \times X_2\right) \cap \left(X_1 \times \bigcap_{finie} O_2^\alpha\right) \\
&= \left(\bigcap_{finie} O_1^\alpha\right) \times \left(\bigcap_{finie} O_2^\alpha\right) = V \times W,
\end{aligned}$$

avec $V \in \tau_1$ et $W \in \tau_2$, donc $V \times W$ est un ouvert élémentaire, on obtient que l'ensemble des intersections finies est l'ensemble des ouverts élémentaire. Donc

$$\tau = \{\bigcup_{qque} V^\alpha \times W^\alpha,\ V^\alpha \in \tau_1 \ \wedge\ W^\alpha \in \tau_2\},$$

c-à-d, la topologie initiale ici est la topologie produit.

Proposition 3.1.2. *Soit $x \in X$, alors, la famille suivante constitue une base de voisinages de x pour la topologie initiale.*

$$\mathcal{B}_x = \{\bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i);\ J \subset I \text{ fini},\ V_i \in \mathcal{V}(\varphi_i(x))\}.$$

Proposition 3.1.3. *Soit (X, τ) et soit (x_n) une suite d'éléments de X et $x \in X$. Alors,*

$$x_n \to x \Leftrightarrow \varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x),\ \forall i \in I.$$

Preuve.

Supposons que $x_n \to x$. Puisque chaque φ_i est continue, on aura $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x),\ \forall i \in I$.

Réciproquement, supposons que, pour tout $i \in I$, $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$. Soit $V \in \mathcal{B}_x$, alors $V = \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$ avec $J \subset I$ fini et pour tout $i \in J$, $V_i \in \mathcal{V}(\varphi_i(x))$, donc,

$$\exists N_i \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_i \Rightarrow \varphi_i(x_n) \in V_i.$$

On pose $N = \max_{i\in J} N_i$, alors

$$\forall i \in J, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_i \Rightarrow \varphi_i(x_n) \in V_i \Rightarrow x_n \in \varphi_i^{-1}(V_i).$$

D'où $x_n \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i) = V$. Par conséquent, $x_n \to x$. □

Proposition 3.1.4. *Soit Z un espace topologique et soit $\psi : Z \to X$ une application. Alors, ψ est continue si et seulement si $\varphi_i \circ \psi$ est contiue de Z dans Y_i pour chaque $i \in I$.*

Preuve.

Si ψ est continue, $\varphi_i \circ \psi$ l'est aussi pour chaque $i \in I$.

Réciproquement, soit u un ouvert de X et montrons que $\psi^{-1}(U)$ est un ouvert de Z. On sait que U est de la forme $\bigcup_{qque} \bigcap_{finie} \varphi_i^{-1}(O_i^\alpha)$ avec $O_i^\alpha \in \tau_i$. D'où

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{qque} \bigcap_{finie} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(O_i^\alpha)$$

est un ouvert de Z, donc ψ est continue. □

3.2 Topologie faible

Soit E un espace de Banach réel et soit $f \in E'$.
On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle, \ \forall x \in E.$$

Lorsque f décrit E', on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'application de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.2.1. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$ (au sens de la Section 3.1 avec $X = E$, $Y_i = \mathbb{R}$ et $I = E$).*

On appelle les ouverts (resp. fermés) par rapport à cette topologie les ouvert (resp. fermés) faibles.

Proposition 3.2.1. *Soit $x_0 \in E$; on obtient une base de voisinages de x_0 pour la topologie $\sigma(E, E')$, en considérant tous les ensembles de la forme $V = \{x \in E;\ |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon,\ i \in I\}$ où I est fini, $(f_i)_{i \in I} \subset E'$ et $\varepsilon > 0$.*
C'est à dire que la famille

$$\mathcal{B}_{x_0} = \{V \subset E;\ \exists \varepsilon > 0, \exists I \text{ fini et } (f_i)_{i \in I} \subset E' \ tq \ V = \{x \in E;\ |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon,\ i \in I\}\}$$

constitue une base de voisinages de x_0 pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Preuve.

Soit I un ensemble fini, $(f_i)_{i\in I} \subset E'$ et $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned} V &= \{x \in E;\ |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon,\ i \in I\} \\ &= \bigcap_{i\in I} \{x \in E;\ |\langle f_i, x\rangle - \langle f_i, x_0\rangle| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{i\in I} \{x \in E;\ \langle f_i, x_0\rangle - \varepsilon < \langle f_i, x\rangle < \langle f_i, x_0\rangle + \varepsilon\}. \end{aligned}$$

En posant, pour tout $i \in I$, $a_i = \langle f_i, x_0\rangle$, on obtient $V = \bigcap\limits_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}(]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[)$.
Comme $]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[$ est un ouvert contenant $a_i = \varphi_{f_i}(x_0)$ et φ_{f_i} est continue sur $(E, \sigma(E, E'))$, $\varphi_{f_i}^{-1}(]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[)$ est un ouvert faible contenant x_0, donc, V est un ouvert faible contenant x_0, d'où il est voisinage de x_0 pour la topologie faible.
Soit U un voisinage de x_0 pour la topologie $\sigma(E, E')$, alors par la Proposition 3.1.2, il existe W un voisinage de x_0 pour la topologie faible tel que $W \subset U$ de la forme $\bigcap\limits_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}(V_i)$ où I un ensemble fini et $V_i \in \mathcal{V}(a_i = \varphi_{f_i}(x_0))$. Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[\subset V_i$, $\forall i \in I$. Donc, il existe $V = \bigcap\limits_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}(]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[)$ tel que $\bigcap\limits_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}(]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[) \subset W \subset U$.
D'où le résultat. □

Proposition 3.2.2. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Preuve.

Soit $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ tel que $\langle f, x\rangle \neq \langle f, y\rangle$, c'est à dire, $\varphi_f(x) \neq \varphi_f(y)$.
On pose $a = \varphi_f(x)$ et $b = \varphi_f(y)$. Comme $\mathbb{R}$ est séparé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\bigcap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[= \emptyset$, donc

$$\varphi_f^{-1}(]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap]b - \varepsilon, b + \varepsilon[) = \varphi_f^{-1}(]a - \varepsilon, a + \varepsilon[) \cap \varphi_f^{-1}(]b - \varepsilon, b + \varepsilon[) = \emptyset.$$

De plus, $\varphi_f^{-1}(]a - \varepsilon, a + \varepsilon[)$ est un ouvert faible qui contient x et $\varphi_f^{-1}(]b - \varepsilon, b + \varepsilon[)$ est un ouvert faible qui contient y. D'où $\sigma(E, E')$ est séparée. □

Remarque 3.2.1. De la proposition précédente, on peut munir un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ de deux topologies séparées,

- la "topologie forte" associée à la norme de E ;
- la "topologie faible" $\sigma(E, E')$.

De plus, par définition, la topologie faible $\sigma(E, E')$ est moins fine que la topologie forte, i. e., l'application identité $Id : (E, \|\cdot\|) \to (E, \sigma(E, E'))$ est continue.

Notation. Étant donné une suite (x_n) de E, on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de (x_n) vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et $x_n \to x$ la convergence de (x_n) vers x pour la topologie forte, alors, si $x_n \rightharpoonup x$, on dit que (x_n) converge faiblement vers x et si $x_n \to x$, on dit que (x_n) converge fortement vers x

Proposition 3.2.3. *Soit (x_n) une suite d'éléments de E. Alors*

1. $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle,\ \forall f \in E'$.
2. *Si $x_n \to x$, alors $x_n \rightharpoonup x$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(\|x_n\|)$ est bornée et*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ et si $f_n \to f$ dans E' (i.e. $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), alors $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.*

Preuve.

1. Par la Proposition 3.1.2, on a

$$\begin{aligned} x_n \rightharpoonup x \quad &\mapsto \quad \varphi_f(x_n) \to \varphi_f(x),\ \forall f \in E' \\ &\Leftrightarrow \quad \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle,\ \forall f \in E'. \end{aligned}$$

2. Comme $x_n \rightharpoonup x$, on a $\|x_n - x\| \to 0$. Or, pour tout $f \in E'$ on a

$$|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{E'} \|x_n - x\| \to 0.$$

Donc, par 1., $x_n \rightharpoonup x$.

3. Soit (x_n) une suite d'éléments de E telle que $x_n \rightharpoonup x$, alors $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$. Donc, pour tout $f \in E'$, la suite $(\langle f, x_n \rangle)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{aligned} T_n : E' \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ f \quad &\mapsto \quad T_n f = \langle f, x_n \rangle. \end{aligned}$$

Toutes les applications T_n sont linéaires et continues sur E' (En effet, il est clair que T_n est linéaire et pour tout $f \in E'$, $|T_n f| = |\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\|_{E'} \|x_n\|$). De plus, pour tout

$f \in E'$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |T_n f| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, x_n\rangle| < +\infty$. Donc, par le Théorème de Banach-Steinhaus, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{E''} < +\infty$. Mais, par le Théorème de Hahn-Banach,

$$\|T_n\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x_n\rangle| = \|x_n\|.$$

Donc, $(\|x_n\|)$ est bornée.

Soit $f \in E'$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\|_{E'}\|x_n\|$, et puisque $(\|x_n\|)$ est bornée,

$$\lim_{n\to\infty} |\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\|_{E'} \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

d'où

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{E'} \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Par conséquent

$$\|x\| = \sup_{\|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &= |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle + \langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \\
&\leq |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \\
&\leq \|f_n - f\|_{E'}\|x_n\| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle|.
\end{aligned}$$

Comme $(\|x_n\|)$ est bornée et $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$, on a $\|f_n - f\|_{E'}\|x_n\| \to 0$ et puisque $x_n \rightharpoonup x$, on a $|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0$. D'où, $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ quand $n \to \infty$.

$\square$

Exemple 3.2.1. *Soit E l'espace des suites réelles $x = (x_m)_m$ de limite nulle, c-à-d,*

$$E = c_0(\mathbb{R}) = \{x = (x_m)_m \subset \mathbb{R};\ \lim_{m\to\infty} x_m = 0\},$$

muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m|, \quad \forall x \in c_0(\mathbb{R}).$$

Son dual E' est l'espace

$$\ell^1(\mathbb{R}) = \{\varphi = (\varphi_m)_m \subset \mathbb{R};\ \sum_{m\geq 0} |\varphi_m| < \infty\},$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_1 = \sum_{m\geq 0} |\varphi_m|, \quad \forall \varphi \in \ell^1(\mathbb{R}).$$

On a pour tout $x \in E$ *et tout* $\varphi \in \ell^1(\mathbb{R})$*, on a* $\langle \varphi, x\rangle = \sum_{m\geq 0} \varphi_m x_m$*. Alors, pour* $(x^n)_{n\geq 0} \subset E$ *avce* $x^n = (x^n_m)_{m\geq 0}$ *et* $x \in E$*, on a*

$$\begin{aligned} x^n \rightharpoonup x \text{ dans } E \;&\Leftrightarrow\; \langle \varphi, x^n\rangle \to \langle \varphi, x\rangle,\ \forall \varphi \in \ell^1(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow\; \sum_{m\geq 0} \varphi_m x^n_m \to \sum_{m\geq 0} \varphi_m x_m,\ \forall \varphi \in \ell^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 0$*, soit* $e^n = (e^n_m)_{m\geq 0}$ *tel que* $e^n_m = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq n \\ 1 & si \quad m = n. \end{cases}$

Alors, $e^n \rightharpoonup 0$ *dans* E*.*

En effet, pour tout $n \geq 0$ *et tout* $m \geq 0$*, si* $m > n$ *alors* $e^n_m = 0$*, donc* $\lim\limits_{m\to\infty} e^n_m = 0$*. D'où* $(e^n)_{n\geq 0} \subset E$*.*

D'autre part, pour tout $\varphi \in E'$*,*

$$\langle \varphi, e^n\rangle = \sum_{m\geq 0} \varphi_m e^n_m = \varphi_n e^n_n = \varphi_n,\ \forall n \geq 0.$$

Puisque $\sum_{n\geq 0} |\varphi_n| < +\infty$*, on a* $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$*, par conséquent,* $e^n \rightharpoonup 0$*.*

Mais, pour tout $n \geq 0$*,*

$$\|e^n\|_\infty = \sup_{m\geq 0} |e^n_m| = 1.$$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \|e_n\|_\infty = 1 \neq 0$*, donc* (e^n) *ne converge pas fortement vers* 0*.*

Exemple 3.2.2. *1. Si* $E = H$ *est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*, alors* $H' = H$ *et donc*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ dans } H \Leftrightarrow \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle,\ \forall y \in H.$$

2. Soit (X, Σ, μ) *un espace mesuré. Pour* $1 < p < +\infty$ *et pour* $p = 1$ *lorsque* μ *est* σ*-finie, on a*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(\mu) \Leftrightarrow \int_X f_n g d\mu \to \int_X f g d\mu, \quad \forall g \in L^q(\mu),$$

où q *est le conjugué de* p *(*$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*).*

Proposition 3.2.4. *Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie forte coïncident.*

En particulier, une suite $(x_n)_n$ converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

Preuve.

On suppose que E est de dimension n et on note $\tau_{\|\cdot\|}$ la topologie forte.

La topologie faible à toujours moins d'ouverts que la topologie forte, alors $\sigma(E, E') \subset \tau_{\|\cdot\|}$.

Réciproquement, nous devons vérifier qu'un ouvert fort est un ouvert faible. On sait qu'un ensemble est ouvert si et seulement s'il est le voisinage de chacun de ses points, donc, il suffit de montrer que pour tout $x \in E$, tout voisinage de x_0 pour la topologie forte est voisinage de x_0 pour la topologie faible.

Soit $x_0 \in E$ et soit U un voisinage de x_0 pour la topologie forte, alors

$$\exists r > 0;\ B(x_0, r) \subset U.$$

On choisit une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, alors,

$$\forall x \in E, \exists !(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Comme E est de dimension finie, toute les normes sur E sont équivalentes, alors, on peut supposer que E est muni de la norme $\| \cdot \|_1$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note

$$\begin{aligned} f_i : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_i, \end{aligned}$$

alors $f_i \in E'$. On pose

$$V = \{x \in E;\ |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \frac{r}{n},\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Par la Proposition 3.2.1, V est un voisinage de x_0 pour la topologie faible. De plus, pour tout $x \in V$ on a

$$\|x - x_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^0| = \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < r.$$

Donc, $x \in B(x_0, r) \subset U$, d'où $V \subset U$, c'est à dire que U est un voisinage de x_0 pour la topologie faible. □

Remarque 3.2.2. Les ouverts (resp. fermés) de la topologie faible sont aussi ouverts (resp. fermés) pour la topologie forte.
Lorsque E est de dimension infini la topologie faible est strictement moins fine que la topologie forte, i. e., il existe des ouvert (resp. fermés) pour la topologie forte qui ne sont pas ouverts (resp. fermés) pour la topologie faible (voir la série de TD N° 3).

Proposition 3.2.5. *Soit E un espace de Banach. Muni de sa topologie faible, E est un espace vectoriel topologique localement convexe.*

Théorème 3.2.6. *Soit $A \subset E$ convexe. Alors, A est faiblement fermé si et seulement s'il est fortement fermé.*

Preuve.

Supposons que A est fortement fermé et montrons qu'il est faiblement fermé.
Soit $x_0 \notin A$, alors, d'après le Théorème 2.5.6, il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, y \rangle, \ \forall y \in A.$$

Posons $V = \{x \in E; \ \langle f, x \rangle < \alpha\} = \varphi_f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$. Alors, $x_0 \in V$ et $V \cap A = \emptyset$, d'où $V \subset C_E^A$, et comme V est un ouvert de $\sigma(E, E')$, alors, C_E^A est un voisinage de x_0 pour la topologie faible.
Puisque x_0 est arbitraire dans C_E^A, C_E^A est un ouvert faible, alors A est faiblement fermé. $\square$

Théorème 3.2.7 (Banach-Mazur). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit (x_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement vers $x \in E$ (i.e. $x_n \rightharpoonup x$). Alors, il existe une suite (y_n) dans E avec, pour tout n*

$$y_n \in co(\{x_k; \ k \geq n\})$$

qui converge fortement vers x

3.3 Topologie faible*

Soit E un espce de Banach. On sait que E' est aussi un espace de Banach. On note E'' l'ensemble des formes linéaires continues sur E'. C'est encore un espace de Banach appelé

bidual de E.

Alors, par la section précédente, on peut munir E' de deux topologies séparées :

- la "topologie forte" associée à la norme de E',
- la "topologie faible" sur E', notée $\sigma(E', E'')$.

La deuxième topologie est en géneral (en dimension infinie) strictement moins fine que la preumière : elle a moins d'ouverts et de fermés. En contrepartie, elle possède plus de compactes et de suites convergentes.

On souhaiterait munir E' d'une troisième topologie séparée suffisamment faible pour que $\overline{B}_{E'}(0,1)$ devienne compacte même si E est de dimension infinie.

Avant d'introduire cette nouvelle topologie, on va définir un sous-espace vectoriel de E'' par le procédé suivant :

À tout $x \in E$, on associe une forme linéaire ξ_x sur E' en posant

$$\begin{aligned} \xi_x : E' &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \xi_x(f) = \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

On a pour tout $x \in E$ et $f \in E'$,

$$|\xi_x(f)| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{E'} \|x\|.$$

Donc, $\xi_x \in E''$ et par le Corollaire 2.6, $\|\xi_x\|_{E''} = \|x\|$.

On note

$$\begin{aligned} J : E &\rightarrow E'' \\ x &\mapsto J(x) = \xi_x. \end{aligned}$$

Il est évident que J est linéaire, de plus, comme

$$\|J(x)\|_{E''} = \|\xi_x\|_{E''} = \|x\|, \quad \forall x \in E,$$

alors J est une isométrie.

L'application J est aussi injective, donc bijective de E dans $J(E)$ et on peut identifier E à $J(E)$.

Définition 3.3.1. *On appelle topologie faible*, qu'on note $\sigma(E', E)$, la topologie la moins fine rendant toutes les applications $(\xi_x)_{x \in E}$ continues (au sens de la Section 3.1, la topologie initiale, avec $I = E$, $Y_i = \mathbb{R}$ et $X = E'$).*

Comme $E \backsimeq J(E) \subset E''$, il est clair que $\sigma(E', E)$ est moins fine que la topologie $\sigma(E', E'')$.

Proposition 3.3.1. *On obtient une base de voisinages d'un point $f \in E'$ pour la topologie $\sigma(E', E)$ en considérant tous les ensembles de la forme*

$$V = \{f \in E';\ |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon,\ \forall i \in I\},$$

où I est fini, $(x_i)_{i\in I} \subset E$ et $\varepsilon > 0$.

Proposition 3.3.2. *La topologie $\sigma(E', E)$ est séparée*

Notation. Étant donnée une suite $(f_n) \subset E'$ et $f \in E'$, on désigne par $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ la convergence de (f_n) vers f pour la topologie faible* $\sigma(E', E)$.

Proposition 3.3.3. *Soit (f_n) une suite de E'. On a*

1. $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.
2. *Si $f_n \to f$ dans E' alors $f_n \rightharpoonup f$ et si $f_n \rightharpoonup f$ alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*
3. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ alors $(\|f_n\|_{E'})$ est bornée et*
$$\|f\|_{E'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{E'}.$$
4. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ et $x_n \to x$ dans E, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

Exemple 3.3.1. *Soit $E = c_0(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, son dual est $E' = \ell^1(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.*
Le bidual E'' est l'espace $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\geq 0}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour tous $x = (x_n)_{n\geq 0} \subset E$, $\varphi = (\varphi_n)_{n\geq 0} \subset E'$ et $u = (u_n)_{n\geq 0} \subset E''$, on a

$$\langle \varphi, x\rangle = \sum_{n\geq 0} \varphi_n x_n \quad et \quad \langle u, \varphi\rangle = \sum_{n\geq 0} u_n \varphi_n.$$

On considère dans E' l'élément $e_n = (e_m^n)_{m\geq 0}$ tel que $e_m^n = \begin{cases} \frac{1}{n} & si \quad n > m \\ 1 & si \quad n \leq m. \end{cases}$ La suite (e_n) ne converge pas fortement vers 0 (la suite de terme général 0) car pour tout $n \geq 1$, $\|e_n\|_1 = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1$, elle ne converge pas non plus vers 0 pour la topologie faible, puisque, si l'on prend l'élément $u \in E''$ tel que $u_n = 1$, pour tout $n \geq 0$, alors

$$\langle u, e_n\rangle = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1 \not\to 0 = \langle u, 0\rangle,$$

mais elle converge vers 0 *pour la topologie faible*, puisque pour tout* $x = (x_n)_{n\geq 0} \in E$ *(donc* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*) on a*

$$\langle e_n, x\rangle = \sum_{m\geq 0} e_m^n x_m = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{n} x_m = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} x_m \to 0 = \langle 0, x\rangle \quad \text{(par le théorème de Cesàro).}$$

Théorème de Cesàro. *Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres réelles qui converge vers* $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, alors la suite des moyenne* $(S_n)_{n\geq 1}$*, i. e.,* $S_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} u_m$*, converge aussi vers* l*.*

Proposition 3.3.4. *Si* E *est de dimension finie, les topologie forte* $\tau_{\|\cdot\|_{E'}}$*, faible* $\sigma(E', E'')$ *et faible** $\sigma(E', E)$ *coïncident sur* E'*.*

Proposition 3.3.5. $(E', \sigma(E', E)$ *est un espace vectoriel topologique localement convexe.*

Théorème 3.3.6 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *La boule unité fermée de* E'

$$\overline{B}_{E'}(0,1) = \{f \in E';\ \|f\|_{E'} \leq 1\}$$

est comâcte pour la topologie faible* $\sigma(E', E)$*.*

Remarque 3.3.1. On sait que dans les espaces vectoriels topologiques, la boule unité fermée est compacte seulement en dimendion finie, alors qu'elle n'est jamais compacte pour la topologie forte en dimension infinie. On comprend alors l'importance fondamentale de la topologie faible*.

Corollaire 3.1. *Toute partie bornée, pour la norme de* E'*, est relativement* $\sigma(E', E)$*-compacte. En particulier, les parties de* E' *qui sont bornées, pour la norme, et* $\sigma(E', E)$*-fermées sont* $\sigma(E', E)$*-compactes.*

Preuve.

Soit K une partie bornée pour la norme de E'. Alors, il existe $r > 0$ tel que $rK \subset \overline{B}_{E'}(0,1)$, il en résult que rK est relativement $\sigma(E', E)$-compact. Comme $(E', \sigma(E', E)$ est un espace vectoriel topologique, alors $M_{\frac{1}{r}}$ est un homéomorphisme de $(E', \sigma(E', E)$ donc K est relativement $\sigma(E', E)$-compacte. □

Lemme 3.2. *Soit* E *un espace de Banach. Alors* J *est un homéomorphisme de* E*, muni de la topologie* $\sigma(E, E')$*, sur* $J(E)$ *muni de la topologie induite sur* $\sigma(E'', E')$*.*

3.4 Espaces réflexifs

Définition 3.4.1. *On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$, c'est à dire, si J est surjective.*

Lorsuque E est réflexif, on identifie E à E''.

L'importance fondamentale de la réflexivité provient d'un résultat de compacité obtenu par Kakutai :

Théorème 3.4.1 (Kakutani). *Soit E un espace de Banach. Alors, E est réflexif si et seulement si $\overline{B}_E(0,1)$ est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Théorème 3.4.2. *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $M \subset E$ un sous espace vectoriel fermé. Alors, M muni de la norme induite par E est réflexif.*

Proposition 3.4.3. *Soit E un espace de Banach. Alors, E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Proposition 3.4.4. *Soit E un espace de Banach réflexif. Soit K un sous ensemble convexe, fermé et borné.*
Alors, K est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Preuve.

Par le Théorème 3.2.6., K est faiblement fermé. D'autre part, puisque K est borné, il existe $m > 0$ tel que $m > 0$ tel que $K \subset m\overline{B}_E(0,1)$. Or, par le Théorème de Kakutani, $\overline{B}_E(0,1)$ est compact pour $\sigma(E, E')$, et puisque $(E, \sigma(E, E'))$ est un espace vectoriel topologique, donc l'application $x \mapsto mx$ est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans lui même. D'où $m\overline{B}_E(0,1)$ est compact pour $\sigma(E, E')$. Par conséquent, K l'est aussi. $\square$

3.5 Espaces Séparables

Définition 3.5.1. *On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Exemple 3.5.1.

1. *Soit $1 \leq p < +\infty$. L'espace $\ell^p(\mathbb{R})$ est séparable et l'espace $\ell^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.*
2. *Soit $1 \leq p < +\infty$. L'espace $L^p(\mathbb{R})$ est séparable et l'espace $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.*

Proposition 3.5.1. *Soit E un espace de Banach.*
Si E' est séparable alors E l'est aussi.

Proposition 3.5.2. *Soit E un espace de Banach. Alors, E est réflexif et séparable si et seulement si E' est réflexif et séparable.*

Proposition 3.5.3. *Soit E un espace de Banach séparable et soit $K \subset E'$ un sous ensemble $\sigma(E', E)$-compact, alors K est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$.*

Corollaire 3.2. *Soit E un espace de Banach séparable et soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans E'. Alors, il existe une sous suite $(f_{n_k})_k$ qui converge pour la topologie faible*.*

Théorème 3.5.4. *Soit E un espace de Banach. Alors, E est séparable si et seulement si $\overline{B}_{E'}(0, 1)$ est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$.*

Corollaire 3.3. *Soit E un espace de Banach séparable. Alors, E' muni de la topologie faible* $\sigma(E', E)$ est séparable.*

Théorème 3.5.5. *Soit E un espace de Banach. Alors, E' est séparable si et seulement si $\overline{B}_E(0, 1)$ est métrisable pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Corollaire 3.4. *Soit E un espace de Banach réflexif et séparable. Alors, $\overline{B}_E(0, 1)$ est métrisable et compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Corollaire 3.5. *Soit E un espace de Banach réflexif et $(x_n)_n$ une suite bornée dans E. Alors, il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$ qui converge faiblement.*

Théorème 3.5.6 (Eberlein-Smulian). *Soit A un sous ensemble d'un espace de Banach E.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *A est (relativement) faiblement compact.*
2. *A est (relativement) faiblement séquentiellement compact*[1].

Lemme 3.3. *Soit E un espace de Banach tel que E' est séparable pour $\sigma(E', E)$. Alors, toute partie $K \subset E$ $\sigma(E, E')$-compact, est métrisable pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

[1]Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$. On dit que A est séquentiellement compact si toute suite de points de A admet une sous suite qui converge vers un point de A