Université Mohammed Seddik Ben Yahia, Jijel

Faculté des Sciences et de la Technologie

Polycopié de cours

Ensembles, Relations et Applications

Dr. Ahmed Nasri

Septembre 2025

Table des matières

Chapitre 1

Les ensembles, les relations et les applications

1.1 Définition d'un ensemble

En mathématiques, on appelle **ensemble** toute collection bien définie d'objets. Les objets qui constituent cette collection sont appelés éléments de l'ensemble. On admet qu'avec des objets, on peut former une collection, autrement dit un ensemble.

Appartenance : Soit E un ensemble et x un objet. « x est un élément de E » s'écrit $x \in E$. « x n'est pas un élément de E » s'écrit $x \notin E$.

Ensemble vide : L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **ensemble vide** et se note $\varnothing$ (ou parfois $\emptyset$).

Égalité : Deux ensembles A et B sont dits **égaux** lorsqu'ils possèdent exactement les mêmes éléments.

Exemple 1.1.1. L'ensemble $E = \{0,1,2\}$,

$$F = \{*, 4, \sqrt{2}\}$$

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$: Certaines des propriétés de $\mathbb{N}$ traduisent des idées plongeant au plus profond de notre conception de ce que veut dire « compter » ; c'est pourquoi certaines propriétés de $\mathbb{N}$ sont des axiomes, acceptés comme point de départ des mathématiques par toutes celles et tous ceux qui en font. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$: Cet ensemble est généralement construit à partir de $\mathbb{N}$, en « ajoutant », pour chaque entier strictement positif $n \in \mathbb{N}^*$, un « opposé » $(-n)$, puis en définissant l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$ par les règles que vous connaissez bien (« moins par moins donne plus », etc.).

On note

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

L'ensemble des nombres rationnels : L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est à son tour construit à partir de $\mathbb{Z}$, en créant, dès que p et q sont deux entiers relatifs avec

$q \neq 0$, un nouvel objet, la « fraction » $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, puis en « décidant » que

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} \quad \text{si et seulement si} \quad p'\,q = p\,q'.$$

On note alors $\mathbb{Q}$ l'ensemble de toutes ces « fractions ».

L'ensemble des nombres réels : L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est lui aussi construit à partir de $\mathbb{Q}$. Mais c'est plus difficile. Quelques éléments à ce sujet vous seront présentés dans le cours « Analyse 1 ».

L'ensemble des nombres complexes : L'ensemble $\mathbb{C}$ fait l'objet d'un chapitre distinct dans ce cours.

Remarque 1.1.2.

1. Les ensembles de nombres usuels — puis beaucoup d'autres ensembles qui leur sont reliés (ensembles de suites, de fonctions, ensembles de matrices,...) — sont tous construits, d'une façon généralement assez subtile, à partir de l'ensemble $\mathbb{N}$. Ce dernier constitue donc le point de départ de la majorité des constructions mathématiques.
2. On écrit souvent $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ pour désigner ces ensembles privés de zéro.

Diverses manières de définir un ensemble : en extension, en compréhension

Définition en extension. Pour décrire un ensemble, on peut donner la liste de ses éléments :

$$A = \{1, -8, *\}$$

est un ensemble comportant trois éléments.

Dans une telle description, l'ordre d'écriture ne compte pas : on a aussi

$$A = \{-8, *, 1\}.$$

Définition en compréhension. On peut aussi décrire un ensemble en spécifiant quelles sont les propriétés qui distinguent les objets qui appartiennent à E des objets qui n'y appartiennent pas. Par exemple, si nous définissons

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N},\ n = p^2\},$$

on a $9 \in B$, mais $3 \notin B$.

Nous rencontrerons aussi l'écriture :

$$B = \{p^2 \mid p \in \mathbb{N}\}.$$

Elle signifie que B est l'ensemble des objets qui peuvent s'écrire sous la forme p^2 pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Par exemple, résoudre une équation algébrique ou différentielle revient à passer d'une écriture de l'ensemble des solutions en *compréhension* à une écriture en *extension*.

Exemple 1.1.3. Deux écritures à ne pas confondre

$$E = \{x \in A \mid P(x)\}$$

signifie « l'ensemble des x de A vérifiant la propriété $P(x)$ ».

$$E = \{f(x) \mid x \in A\}$$

signifie « l'ensemble des objets y de la forme $y = f(x)$ avec $x \in A$ ».

Équivalence de certaines définitions

Naturellement, un ensemble donné peut admettre plusieurs descriptions différentes : si

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\},$$

on a bien sûr

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Une description est « en extension », l'autre « en compréhension », mais elles définissent le même ensemble.

1.2 Opérations sur les ensembles

1.2.1 Inclusion et ensemble des parties

Définition 1.2.1. Soient A et E deux ensembles. On dit que A est inclus dans E, ou que A est une partie de E, si tous les éléments de A appartiennent à E. Dans ce cas, on note $A \subset E$.

Parties triviales

— On a toujours $E \subset E$: l'ensemble E lui-même est toujours une partie de E.
— De plus, l'ensemble vide $\varnothing$ est toujours une partie de E .

Remarque 1.2.2. Si A, B et C sont trois ensembles et si on a $A \subset B$ et $B \subset C$, alors l'inclusion $A \subset C$ est aussi vérifiée. Par exemple, les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont construits à partir de $\mathbb{N}$ de façon à ce que les inclusions suivantes soient vraies :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Exemple 1.2.3. Considérons

$$A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ n = k(k+1) \,\}$$

et notons B l'ensemble des entiers pairs. Montrons l'inclusion $A \subseteq B$.

Soit n un élément de A. On peut alors écrire $n = k(k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrons que n est pair en distinguant deux cas :

— **Si k est pair**, alors on peut écrire $k = 2q$ avec $q \in \mathbb{N}$, et donc

$$n = k(k+1) = 2q(q+1),$$

donc n est pair.

— **Si k est impair**, alors on peut écrire $k = 2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$, et donc

$$n = k(k+1) = (2q+1)(2q+2) = 2(2q+1)(q+1),$$

donc ici aussi n est pair.

Dans tous les cas, on a $n \in B$. Ainsi $A \subseteq B$.

Proposition 1.2.4 (Égalité d'ensembles et double inclusion)**.** *Si A et B sont deux ensembles, alors on a l'équivalence :*

$$A := B \quad \Longleftrightarrow \quad (A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A).$$

Exemple 1.2.5. Considérons par exemple les ensembles

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2x^2+1} = 2x+1\right\} \quad \text{et} \quad B = \{0\}.$$

Montrons que $A = B$ en vérifiant séparément les inclusions $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Inclusion $B \subseteq A$. Il suffit de constater que pour $x = 0$, on a bien

$$\sqrt{2x^2+1} = 2x+1.$$

Inclusion $A \subseteq B$. Soit x un élément de A. On a alors

$$\sqrt{2x^2+1} = 2x+1.$$

En élevant au carré, on obtient

$$2x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1,$$

c'est-à-dire

$$2x^2 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(x+2) = 0.$$

On a donc $x = 0$ ou $x + 2 = 0$, soit $x = 0$ ou $x = -2$.

Mais pour $x = -2$, on constate que

$$\sqrt{2x^2+1} = 3 \quad \text{alors que} \quad 2x+1 = -3 :$$

il est donc impossible que -2 appartienne à A. On en déduit donc que $x = 0$, et donc $x \in B$.

Définition 1.2.6. Ensemble des parties d'un ensemble Soit E un ensemble. On appelle *ensemble des parties de E*, et on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble ayant pour éléments les parties de E.

Si A est un ensemble, on a donc :

$$A \in \mathcal{P}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq E.$$

Exemple Si $A = \{1, 2, 3\}$, les parties de A sont :

— l'ensemble vide ;
— les singletons $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$;
— les paires $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 3\}$;
— l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$ lui-même.

L'ensemble $\mathcal{P}(A)$ comporte donc 8 éléments :

$$\mathcal{P}(A) = \left\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\right\}.$$

Proposition 1.2.7. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E} = 2^n.$$

1.2.2 Intersection et réunion de deux ensembles.

Définition 1.2.8. Soient A et B deux ensembles. L'intersection $A \cap B$ est l'ensemble des objets appartenant à la fois à A et à B :

$$x \in (A \cap B) \iff (x \in A \text{ et } x \in B).$$

La réunion $A \cup B$ est l'ensemble des objets appartenant à au moins l'un des deux ensembles A, B :

$$x \in (A \cup B) \iff (x \in A \text{ ou } x \in B).$$

Exemple 1.2.9. Si $A = \{2, 5, 7\}$ et $B = \{1, 5, 7, 9\}$, on a

$$A \cup B = \{1, 2, 5, 7, 9\}, \quad A \cap B = \{5, 7\}.$$

Définition 1.2.10. Lorsque deux parties A et B vérifient $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont disjointes.

Proposition 1.2.11.

Si A est un ensemble quelconque, on a toujours $A \cap \varnothing = \varnothing$ et $A \cup \varnothing = A$.

Si A et B sont deux ensembles, on a toujours $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$. Il en est deux, cependant, qui ont une importance théorique particulière.

Proposition 1.2.12. *Soient A, B et C trois ensembles. On a les égalités :*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad , \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Exemple 1.2.13. Si $A = \{2, 5, 7\}$, $B = \{1, 5, 7, 9\}$ et $C = \{2, 7, 9, 10\}$, alors :

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 5, 7, 9, 10\} \quad \text{et} \quad A \cap B \cap C = \{7\}.$$

Complémentaire

Définition 1.2.14 (Différence ensembliste)**.** Soient A et B deux ensembles. La différence ensembliste $A \setminus B$ est l'ensemble des objets appartenant à A, mais pas à B :

$$x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ et } x \notin B).$$

Exemple 1.2.15. Si $A = \{2, 5, 7\}$ et $B = \{1, 5, 7, 9\}$, alors :

$$A \setminus B = \{2\} \quad \text{et} \quad B \setminus A = \{1, 9\}.$$

L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres réels x qu'il est impossible d'écrire sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers ($q \neq 0$). C'est l'ensemble des nombres irrationnels.

Définition 1.2.16 (Complémentaire d'une partie)**.** Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble $E \setminus A$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Notations. Outre $E \setminus A$, on trouve plusieurs notations pour désigner le complémentaire de A dans E : on le note parfois $C_E(A)$, et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, on le note parfois A^c ou $\complement A$.

Exemple 1.2.17. 1) Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{2, 3\}$, alors

$$C_E(A) = \{1, 4, 5\}.$$

2) Soit $E = \mathbb{R}$. Soit $A = [0, 1]$. On a

$$C_E(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin [0, 1]\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[.$$

De plus, si l'on note $B = C_E(A)$ l'ensemble que nous venons de décrire, alors

$$C_E(B) = [0, 1] = A.$$

Proposition 1.2.18. *Si E est un ensemble et si A est une partie de E, alors*

$$C_E\big(C_E(A)\big) = A.$$

Les lois de De Morgan ont aussi une traduction en termes d'ensembles :

Proposition 1.2.19. *Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. On a les égalités :*

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B), \qquad C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B).$$

Démonstration. Prouvons la première égalité : si x est un élément de E, alors

$$\begin{aligned} x \in C_E(A \cap B) &\iff x \notin A \cap B \quad \text{par définition}, \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \quad \text{(lois de De Morgan)}, \\ &\iff x \in C_E(A) \text{ ou } x \in C_E(B), \\ &\iff x \in C_E(A) \cup C_E(B). \end{aligned}$$

Les ensembles $C_E(A \cap B)$ et $C_E(A) \cup C_E(B)$ ont donc les mêmes éléments : ils sont égaux. La seconde égalité peut se prouver de la même manière.

Remarque 1.2.20. Les liens entre les expressions utilisées en logique (« et », « ou », etc.) et les opérations sur les ensembles (intersection, union, etc.) sont étroits... mais il ne faut pas tout mélanger.

Les expressions « et », « ou », « implique », etc., sont à placer entre des *propositions*, pas entre des *ensembles*.

Les signes $\cap$, $\cup$, $\setminus$, etc., sont à placer entre des *ensembles*, pas entre des propositions.

En d'autres termes, si P et Q sont des propositions, « P et Q » a un sens, mais « $P \cap Q$ » n'en a pas. Si A et B sont des ensembles, « $A \cap B$ » a un sens, mais « A et B » n'en a pas.

1.2.3 Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles

Définition 1.2.21. Soient E_1 et E_2 deux ensembles. Le produit cartésient E_1 par E_2 est par définition l'ensemble $E_1 \times E_2$ des couples (x, y) tels que $x \in E_1$ and $y \in E_2$.

On peut représenter le produit cartésien $E_1 \times E_2$ dans un repère du plan en faisant figurer les éléments de E_1 sur l'axe des abscisses et ceux de E_2 sur l'axe des ordonnées.

À partir de deux objets, on peut former un nouvel objet, le couple (x, y).

— **Attention :** l'ordre compte : les couples $(3, 5)$ et $(5, 3)$ sont deux objets différents.

— On peut former un couple où figure deux fois le même objet : le couple $(3, 3)$ existe, et c'est un objet différent du nombre 3.

Remarque 1.2.22. Soit n un entier naturel non nul; supposons donnés n ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est l'ensemble des n-uplets où, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, la i-ème composante est un élément de l'ensemble A_i :

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,;\, a_1 \in A_1,\, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Exemple 1.2.23. 1) Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 7\}$, alors :

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 7), (2, 1), (2, 7), (3, 1), (3, 7)\},$$

tandis que :

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)\}.$$

On remarquera que $A \times B \neq B \times A$.

2) Représentation graphique de $\mathbb{R}^2$

Si $E = \mathbb{R}^2$, alors les éléments de E sont des couples de nombres réels. On peut les représenter sur un plan, en utilisant les coordonnées cartésiennes : l'élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est alors représenté comme le point d'abscisse x et d'ordonnée y. Dans $\mathbb{R}^2$, on peut utiliser les coordonnées cartésiennes pour dessiner non seulement des points, mais aussi des parties de $\mathbb{R}^2$.

3) Soit $E = [0, 2] \times \mathbb{R}$

Relation Binaire

On rencontre souvent en mathématiques des propositions du type « les objets x et y ont la propriété $\mathcal{P}$ en commun » ou encore de type comparatif « $x \leq y$, $A \subset B$, etc. ». Une relation binaire généralise cette situation à un ensemble E quelconque.

Définition 1.2.24. Soit E un ensemble non vide. Une relation binaire sur E est la donnée d'une partie $\mathcal{R}$ de E^2.

Notation On note $x\mathcal{R}y$ plutôt que $(x, y) \in \mathcal{R}$, et l'on dit que x et y sont en relation.

Exemple 1.2.25. On peut définir une relation sur $\mathbb{R}^2$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$, que l'on notera simplement $x \leq y$.

De même, pour tout ensemble E, on peut définir la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ par $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A \subset B$, que l'on notera plus simplement $A \subset B$.

Les relations binaires sont classées en fonction de leurs propriétés.

Définition 1.2.26. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est dite :

1. **Réflexive** lorsque $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$,
2. **Symétrique** lorsque $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,
3. **Antisymétrique** lorsque $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$,
4. **Transitive** lorsque $\forall (x,y,z) \in E^3,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemple 1.2.27. Voici quelques relations :

— Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par $(n,m)\mathcal{R}(n',m')$ si et seulement si $n \leq n'$ et $m \leq m'$. Cette relation est clairement réflexive, antisymétrique et transitive.

— La relation $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est de même réflexive, antisymétrique (principe de la double inclusion) et transitive.

— La relation définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 = y^2$ est réflexive, symétrique et transitive.

— La relation définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 = y^2 + 1$ n'est ni réflexive, ni symétrique, ni transitive.

1.2.4 Relation d'équivalence

Une **relation** sur un ensemble E, c'est la donnée, pour tout couple $(x,y) \in E \times E$, de la valeur « Vrai » (s'ils sont en relation), ou de la valeur « Faux » sinon.

On peut schématiser une relation ainsi : les éléments de E sont représentés par des points, et une flèche de x vers y signifie que x est en relation avec y, c'est-à-dire que l'on associe « Vrai » au couple (x,y).

Définition 1.2.28. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

— **Réflexivité :** $\forall x \in E,\ xRx$.

— **Symétrie :** $\forall x, y \in E,\ xRy \Rightarrow yRx$.

— **Transitivité :** $\forall x, y, z \in E,\ (xRy$ et $yRz) \Rightarrow xRz$.

Exemple 1.2.29. Voici quelques exemples classiques :

1. La relation $\mathcal{R}$ « être parallèle » est une relation d'équivalence sur l'ensemble E des droites affines du plan :
   — **Réflexivité :** une droite est parallèle à elle-même.
   — **Symétrie :** si D est parallèle à D', alors D' est parallèle à D.
   — **Transitivité :** si D est parallèle à D' et D' parallèle à D'', alors D est parallèle à D''.
2. La relation « être du même âge » est une relation d'équivalence.
3. La relation « être perpendiculaire » n'est pas une relation d'équivalence (ni la réflexivité, ni la transitivité ne sont vérifiées).
4. La relation « $<$ » (sur $E = \mathbb{R}$, par exemple) n'est pas une relation d'équivalence (la symétrie n'est pas vérifiée).

Définition 1.2.30. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit $x \in E$, la **classe d'équivalence** de x est :

$$\mathrm{cl}(x) = \{\, y \in E \mid y\mathcal{R}\,x \,\}.$$

Exemple 1.2.31. Pour la relation « être du même âge », la classe d'équivalence d'une personne est l'ensemble des personnes ayant le même âge. Il y a donc une classe d'équivalence formée des personnes de 19 ans, une autre formée des personnes de 20 ans, etc.

L'ensemble E se divise selon cette décomposition en classes d'équivalence :
- On est dans la même classe d'équivalence si et seulement si on a le même âge.
- Deux personnes appartiennent soit à la même classe, soit à des classes disjointes.
- Si l'on choisit une personne de chaque âge possible, on obtient un ensemble de représentants C. Ainsi, toute personne appartient à une et une seule classe correspondant à l'un de ces représentants.

Proposition 1.2.32. *On a les propriétés suivantes :*

1. $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \iff xRy$.
2. *Pour tout* $x, y \in E$, *on a* $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$ *ou bien* $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \varnothing$.
3. *Soit* C *un ensemble de représentants de toutes les classes, alors*

$$\{\, \mathrm{cl}(x) \mid x \in C \,\}$$

constitue une ***partition*** *de* E.

Une ***partition*** *de* E *est un ensemble* $\{E_i\}$ *de parties de* E *tel que :*

$$E = \bigcup_i E_i \quad \text{et} \quad E_i \cap E_j = \varnothing \text{ si } i \neq j.$$

Exemple 1.2.33. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur E par :

$$x\mathcal{R}\,y \iff x \text{ et } y \text{ ont le même reste dans la division par } 4.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Déterminer les classes d'équivalence.
3. Donner la partition de E associée à cette relation.

1. **Vérification des propriétés :**
   - *Réflexivité :* Pour tout $x \in E$, le reste de x dans la division par 4 est égal à lui-même. Donc $\mathcal{R}$. R est réflexive.
   - *Symétrie :* Si $\mathcal{R}$, alors x et y ont le même reste dans la division par 4. Par conséquent, y et x ont aussi le même reste. Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
   - *Transitivité :* Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors x, y, z ont le même reste dans la division par 4. Donc xRz. Ainsi, R est transitive.

   Par conséquent, $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence**.
2. **Détermination des classes d'équivalence :**

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}(1) &= \{1, 5\} && \text{(reste 1)} \\ \mathrm{cl}(2) &= \{2, 6\} && \text{(reste 2)} \\ \mathrm{cl}(3) &= \{3, 7\} && \text{(reste 3)} \\ \mathrm{cl}(4) &= \{4, 8\} && \text{(reste 0)} \end{aligned}$$

3. **Partition associée :**

$$E = \{1, 5\} \cup \{2, 6\} \cup \{3, 7\} \cup \{4, 8\}$$

Les ensembles $\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 8\}$ sont disjoints et leur union donne tout E.

1.2.5 Relation d'ordre

Une relation $\leq$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. On note traditionnellement $\preceq$ une relation d'ordre et on dira que $(E, \preceq)$ est un **ensemble ordonné** pour signifier que E est muni de la relation d'ordre $\preceq$.

Exemple 1.2.34. Voici quelques illustrations :
— La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
— La relation de divisibilité définie sur $\mathbb{N}^*$ par $n \mid m$ si et seulement si n divise m est une relation d'ordre.
— La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre.

Définition 1.2.35. Une relation d'ordre $\preceq$ sur E est dite **totale** lorsque $\forall(x, y) \in E^2$, $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. On dit alors que l'ensemble $(E, \preceq)$ est **totalement ordonné**.

Autrement dit, l'ordre $\preceq$ est total lorsque deux éléments quelconques de l'ensemble E sont comparables au moyen de la relation $\preceq$.

Exemple 1.2.36. L'ensemble $(\mathbb{N}, \leq)$ est totalement ordonné. Ce n'est pas le cas de l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$ lorsque E possède plus de deux éléments. En effet, en notant a et b deux éléments distincts de E, les parties $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables par l'inclusion.

Exemple 1.2.37. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. On considère $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E. On définit une relation $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A \subseteq B \iff (\forall x \in A,\ x \in B).$$

1. Montrer que $\subseteq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
2. L'ordre $\subseteq$ est-il total sur $\mathcal{P}(E)$?

1. **Vérification des propriétés d'un ordre.**
   — *Réflexivité :* pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \subseteq A$.
   — *Antisymétrie :* si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, alors $A = B$.
   — *Transitivité :* si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$, alors $A \subseteq C$.
   Donc $\subseteq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
2. **L'ordre est-il total ?** Non. Par exemple, $\{1\}$ et $\{2\}$ ne sont pas comparables : $\{1\} \nsubseteq \{2\}$ et $\{2\} \nsubseteq \{1\}$. Donc $\subseteq$ est un ordre partiel, non total.

1.3 Applications

Définition 1.3.1. Soient E et F deux ensembles. Une *application* f de E dans F est une correspondance qui, à tout élément $x \in E$, associe un unique élément $f(x) \in F$.

Attention. Lorsqu'on s'intéresse à une application f, il est essentiel de préciser que *l'ensemble de départ* et *l'ensemble d'arrivée* font partie intégrante de sa définition.

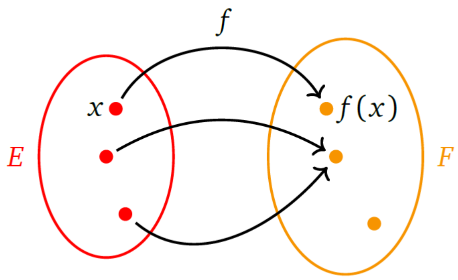
Ainsi, les deux applications suivantes sont distinctes :

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

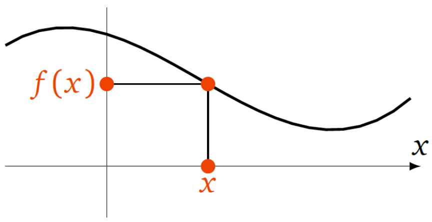
En effet, f_1 et f_2 diffèrent par leurs ensembles de définition et d'arrivée : par exemple, f_1 est croissante, tandis que f_2 ne l'est pas.

Nous représentons les applications par deux types d'illustrations :

1. *Les ensembles « patates » :* L'ensemble de départ (et celui d'arrivée) est schématisé par un ovale et ses éléments par des points. L'association $x \mapsto f(x)$ est représentée par une flèche :
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$



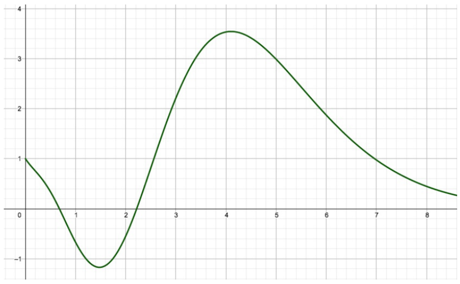
2. *Les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:* L'ensemble de départ $\mathbb{R}$ est représenté par l'axe des abscisses et celui d'arrivée par l'axe des ordonnées. L'association $x \mapsto f(x)$ est représentée par le point $(x, f(x))$:



Égalité. Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si, pour tout $x \in E$,
$$f(x) = g(x).$$
On note alors $f = g$.

Graphe. Si f est une application de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$, alors on peut tracer son *graphe* : c'est une partie de $\mathbb{R}^2$, et le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est situé « sur » le graphe de f si et seulement si
$$y = f(x).$$

Le graphe de $f : E \to F$ est :
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in E\}.$$



Composition. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. La composition $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Exemple 1.3.2. — $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2,$$

— $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin(x).$$

Alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(f \circ g)(x) = (\sin(x))^2 \quad \text{et} \quad (g \circ f)(x) = \sin(x^2).$$

L'identité. L'identité

$$\mathrm{id}_E : E \to E; x \mapsto x,$$

, sera très utile dans la suite. Son graphe est une partie de $E \times E$: il s'agit de l'ensemble $G = \{(x, y) \in E \times E \mid y = x\}$.

Remarque 1.3.3. — Les applications $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$ peuvent être très différentes, voire ne pas exister toutes les deux.
— Si $f : E \to F$ est une application, alors on a $\mathrm{id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{id}_E = f$.

Proposition 1.3.4. ***Associativité de la composition.*** *Soient E, F, G, H quatre ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. On a l'égalité*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Démonstration. Les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont le même ensemble de départ (à savoir E) et le même ensemble d'arrivée (à savoir H) ; de plus, pour tout $x \in E$, on constate que

$$[h \circ (g \circ f)](x) \quad \text{et} \quad [(h \circ g) \circ f](x)$$

sont tous les deux égaux à $h(g(f(x)))$. Cela prouve l'égalité des deux applications. □

1.3.1 Image directe et réciproque d'un ensemble

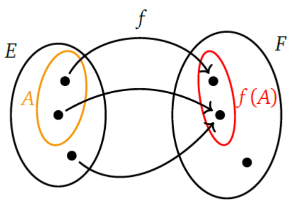
Définition 1.3.5. Soit A une partie de E. On appelle **ensemble image** de A par f, et on note $f(A)$, la partie de F suivante :

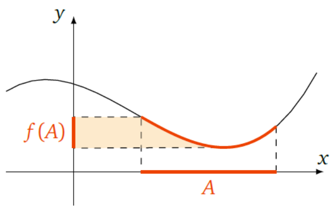
$$f(A) = \{\, y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \,\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des éléments de F qui peuvent être obtenus comme image d'un élément de A.

Ou encore, pour $A \subset E$:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$





Exemple 1.3.6. Considérons à nouveau l'application

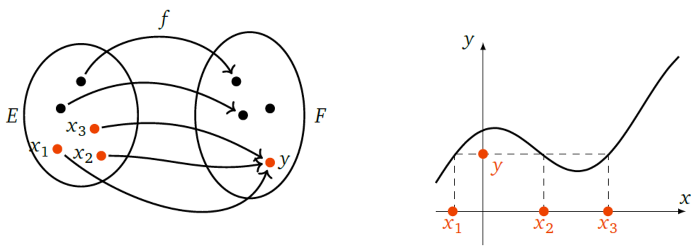
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

— Si $A = [2, 3]$, alors $f(A) = [4, 9]$.
— Si $A = [-4, 1]$, alors $f(A) = [0, 16]$.
— Si $A = \mathbb{R}$, alors $f(A) = \mathbb{R}^+$.

Définition 1.3.7. Image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée.
Soit B une partie de l'ensemble d'arrivée F. On appelle **image réciproque** de B par f, et on note $f^{-1}(B)$, la partie de l'ensemble de départ E suivante :

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in E \mid f(x) \in B \,\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à B.



Exemple 1.3.8. Considérons à nouveau l'application

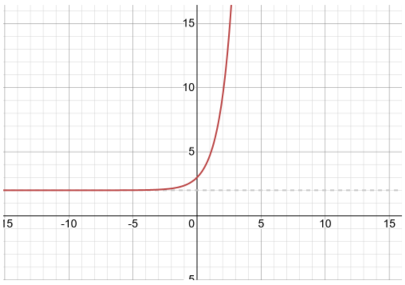
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

— Si $B = [2, 3]$, alors
$$f^{-1}(B) = [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}].$$
— Si $B = [-1, 9]$, alors $f^{-1}(B) = [-3, 3]$. Si $B_0 = [0, 9]$, on a en fait $f^{-1}(B_0) = f^{-1}(B)$.
— Si $B = [-3, -2]$, alors $f^{-1}(B)$ est vide.

1.3.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 1.3.9. Injectivité d'une application Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que f est **injective** lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent par f.

Exemple 1.3.10. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto e^x + 2$, alors f est injective. En effet, si y est un élément de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, deux cas peuvent se présenter :
— Si $y \leq 2$, alors y n'admet *aucun* antécédent par f ;



— Si $y > 2$, alors y admet un et un seul antécédent par f : le nombre $x = \ln(y-2)$ vérifie $f(x) = y$, et c'est le seul réel à vérifier cette propriété.

Dans les deux cas, le nombre y admet au plus un antécédent par f.

Proposition 1.3.11. ***Injectivité d'une application : en pratique.***

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour que f soit injective, il faut et il suffit que la propriété suivante soit vérifiée :

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E, \quad \big(\ x \neq x' \Rightarrow\ f(x) \neq f(x')\big)$$

ou encore par contraposée

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E, \quad \big(f(x) = f(x')\ \Rightarrow\ x = x'\big).$$

Exemple 1.3.12. — La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective, car $\sin(0) = \sin(2\pi)$ alors que $0 \neq 2\pi$.

— Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto x^2$, alors f n'est pas injective. En effet, le nombre 5 admet deux antécédents distincts, à savoir $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

Exemple 1.3.13. Soit la fonction f de l'exemple précédent, la restriction $h = f|_{\mathbb{R}^+}$ est l'application

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2,$$

et cette application est injective. En effet, pour tout élément y de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, il existe au plus un élément $x \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $h(x) = y$, puisque selon la valeur de y, deux cas peuvent se présenter :

— Si $y < 0$, alors y n'admet *aucun* antécédent par h ;

— Si $y \geq 0$, alors y admet *un et un seul* antécédent par h : il s'agit du nombre $x = \sqrt{y}$.

Exemple 1.3.14. — Si E est un ensemble quelconque, alors l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ est injective (rappelons que l'application id_E est définie par $\forall x \in E,\ \mathrm{id}_E(x) = x$).

— Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction constante, alors f n'est pas injective.

Proposition 1.3.15. ***Cas des applications strictement monotones.***
Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application. Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Exemple 1.3.16. Considérons l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x + \cos(x).$$

Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée $f'(x)$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2 - \sin(x).$$

Comme sin prend ses valeurs dans $[-1, 1]$, la dérivée f' est partout strictement positive. On en déduit que f est strictement croissante. Le résultat précédent montre donc que la fonction f est injective.

Remarque 1.3.17. — Ce résultat n'est valable que si l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de f sont des parties de $\mathbb{R}$.
— Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le résultat ci-dessus donne une condition **suffisante**, mais pas **nécessaire**, pour que f soit injective.
Il existe en effet des fonctions injectives sans être strictement monotones : c'est le cas, par exemple, de l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Attention : cette fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}*^+$ et sur $\mathbb{R}*^-$, mais elle n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.3.18. ***Composition et injectivité.***
Soient E, F et G trois ensembles, et considérons deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective (mais on ne peut rien en déduire pour g).*

Exemple 1.3.19. Soient les ensembles

$$E = \mathbb{R}, \quad F = \mathbb{R}, \quad G = \mathbb{R},$$

et les applications suivantes :

$$f : E \to F, \quad f(x) = 2x + 1,$$

$$g : F \to G, \quad g(x) = x^2.$$

1. Déterminer si f est injective.
2. Déterminer si g est injective.
3. Étudier l'injectivité de la composée $g \circ f$.
4. Vérifier sur cet exemple que la réciproque de la première partie de la proposition est fausse : le fait que $g \circ f$ soit non injective n'implique pas que f soit non injective.

Corrigé Soient $E = \mathbb{R},\ F = \mathbb{R},\ G = \mathbb{R}$ et

$$f(x) = 2x + 1, \qquad g(x) = x^2.$$

1. *Injectivité de f.*
Supposons $f(x) = f(y)$. Alors $2x + 1 = 2y + 1$. On en déduit $2x = 2y$ donc $x = y$. Ainsi f est injective.
2. *Injectivité de g.*
On a $g(1) = 1$ et $g(-1) = 1$ avec $1 \neq -1$. Donc g n'est pas injective.
3. *Injectivité de $g \circ f$.*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2.$$

Par exemple,

$$(g \circ f)(0) = (2 \cdot 0 + 1)^2 = 1, \qquad (g \circ f)(-1) = (2 \cdot (-1) + 1)^2 = 1,$$

et $0 \neq -1$. Donc $g \circ f$ n'est pas injective.
(On peut aussi résoudre $(2x + 1)^2 = (2y + 1)^2$. Cela donne $2x + 1 = \pm(2y + 1)$. Le signe $+$ donne $x = y$ mais le signe $-$ donne $x + y = -1$, donc il existe des couples distincts avec la même image.)
4. Conclusion relative à la proposition. Cet exemple illustre que :
   — Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective (partie vraie de la proposition).
   — Si $g \circ f$ est injective alors f est injective (preuve : si $f(x) = f(y)$ alors $g(f(x)) = g(f(y))$ et donc $x = y$).

   — En revanche, l'injectivité de f n'implique pas l'injectivité de g ni celle de $g \circ f$: l'exemple ci-dessus le montre.

Définition 1.3.20. Surjectivité d'une application. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que f est **surjective** lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f.

Remarque 1.3.21. Il existe un lien direct entre la surjectivité d'une application et son image directe. Si $f : E \to F$, on note $f(E)$ l'ensemble des éléments de F qui sont effectivement atteints par f, c'est-à-dire :

$$f(E) = \{\, f(x) \mid x \in E \,\}.$$

Dire que f est surjective revient donc à affirmer que tout élément de F est atteint par f, autrement dit :

$$f(E) = F.$$

Exemple 1.3.22. — La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est surjective : en effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, le nombre $x = e^y$ appartient à l'ensemble de départ $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $\ln(x) = y$.
— Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto e^x + 3$, alors f n'est pas surjective. En effet, le nombre 2 n'admet aucun antécédent par f.
— Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto x^2$, alors g n'est pas surjective. En effet, l'élément -3 de l'ensemble d'arrivée n'admet aucun antécédent par g.

Exemple 1.3.23. De l'importance de l'espace d'arrivée

1. En revanche, si l'on reprend la fonction g de l'exemple précédent, la co-restriction $h = g|_{\mathbb{R}_+}$ est l'application :

$$h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^2,$$

et cette application est surjective. En effet, pour tout élément y de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}_+$, il existe au moins un élément x de $\mathbb{R}_+$ vérifiant $h(x) = y$: on peut choisir par exemple $x = \sqrt{y}$.

2. Si E est un ensemble quelconque, alors l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ est surjective.
3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction constante, alors f n'est pas surjective.

Proposition 1.3.24. ***Composition et surjectivité***
Soient E, F, et G trois ensembles ; considérons deux applications :

$$f : E \to F \quad \text{et} \quad g : F \to G.$$

1. *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
2. *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective (mais on ne peut rien en déduire pour f).*

Exemple 1.3.25. Prenons les ensembles :

$$E = \{1, 2\}, \quad F = \{a, b, c\}, \quad G = \{x, y\}.$$

Définissons les applications :

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \qquad g(a) = x, \quad g(b) = y, \quad g(c) = y.$$

Alors, on a :

$$(g \circ f)(1) = g(a) = x, \qquad (g \circ f)(2) = g(b) = y.$$

Ainsi, $g \circ f$ est surjective sur G, car ses images couvrent $G = \{x, y\}$.
De plus, g est surjective sur G, puisqu'elle atteint x et y.
En revanche, f n'est pas surjective sur F, car l'élément $c \in F$ n'a pas d'antécédent dans E.

Définition 1.3.26. Bijectivité d'une application Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que f est bijective lorsqu'elle est à la fois injective et surjective, autrement dit, lorsque tout élément de F admet un et un seul antécédent par f.

Exemple 1.3.27.

1. La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \ln(\sqrt{3x})$$

est bijective.

En effet, si $y \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x) = y$. Résolvons $\ln(\sqrt{3x}) = y$:

$$\sqrt{3x} = e^y \quad \Rightarrow \quad 3x = (e^y)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}(e^y)^2.$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f(x) = y$; donc f est bijective.

2. La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective, car elle n'est pas surjective : par exemple, le nombre -3 n'a aucun antécédent par exp, puisque $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3.28. Bijection réciproque d'une application bijective

Soit $f : E \to F$ une application bijective. La **bijection réciproque** de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ définie de la manière suivante :

$$f^{-1} : F \to E, \quad y \longmapsto \text{l'unique élément } x \in E \text{ vérifiant } y = f(x).$$

Exemple 1.3.29. Considérons la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, \quad x \longmapsto 4e^{5x}.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. En effet :

$$4e^{5x} = y \quad \Leftrightarrow \quad e^{5x} = \frac{y}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 5x = \ln\left(\frac{y}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{y}{4}\right).$$

Ainsi, f est bijective, et sa bijection réciproque est :

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad a \longmapsto \frac{1}{5}\ln\left(\frac{a}{4}\right).$$

Remarque 1.3.30. Si $f : E \to F$ est une application quelconque et si y est un élément de l'espace d'arrivée F, la recherche des antécédents de y par f peut être vue comme la résolution de l'équation

$$f(x) = y, \quad \text{d'inconnue } x \in E.$$

Dire que f est bijective revient à dire que cette équation admet toujours une et une seule solution, à savoir $f^{-1}(y)$.

On pourra retenir l'idée suivante :

$$\text{Si } f \text{ est bijective, alors } \forall x \in E, \forall y \in F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Attention (notations : $f^{-1}(B)$ vs $f^{-1}(y)$). Dans ce cours, la notation f^{-1} est utilisée dans deux contextes différents qu'il ne faut pas confondre :

— Si y est un élément de F, la notation $f^{-1}(y)$ n'a de sens que si f est bijective ; elle désigne alors un **élément** de E.

— Si $B \subset F$ est une partie de F, la notation $f^{-1}(B)$ a toujours un sens, même si f n'est pas bijective ; elle désigne alors un **ensemble** inclus dans E.

Proposition 1.3.31. ***Caractérisation de la bijectivité par la composition*** *Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application.*

*Pour que f soit **bijective**, il faut et il suffit qu'il existe une application $g : F \to E$ vérifiant :*

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{id}_F.$$

Lorsque c'est le cas, l'application g coïncide nécessairement avec la bijection réciproque f^{-1}.

Proposition 1.3.32. ***Bijection réciproque d'une composée*** *Soient E, F et G trois ensembles, et considérons deux applications*

$$f : E \to F \quad \text{et} \quad g : F \to G.$$

Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et sa bijection réciproque est donnée par :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exemple 1.3.33. Inverse d'une composée de bijections Considérons les ensembles $E = F = G = \mathbb{R}$, et les applications :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 3, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 5x - 1.$$

Les fonctions f et g sont bijectives car ce sont des fonctions affines strictement croissantes.

Calculons la composée :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5(2x + 3) - 1 = 10x + 14.$$

On cherche maintenant la bijection réciproque de $g \circ f$.

Méthode directe :

$$y = 10x + 14 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y - 14}{10},$$

donc $(g \circ f)^{-1}(y) = \dfrac{y - 14}{10}$.

Méthode par la formule $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$:

$$f^{-1}(y) = \frac{y - 3}{2}, \qquad g^{-1}(y) = \frac{y + 1}{5}.$$

Ainsi,

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(y) = f^{-1}\left(\frac{y + 1}{5}\right) = \frac{\frac{y+1}{5} - 3}{2} = \frac{y - 14}{10}.$$

On obtient bien :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exercices

Exercice 1

Énumérer l'ensemble des parties $P(\{1, 2, 3\})$.

Exercice 2

Montrer que :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
— Calculer $f([0, 1[)$ et $f^{-1}([1, 2[)$.
— f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \in 2\mathbb{Z}$$

est une relation d'équivalence et décrire les classes d'équivalence.

Exercice 5

Montrer que la relation $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre.

Chapitre 2

Les nombres complexes

2.1 Définition d'un nombre complexe

Un **nombre complexe** est un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ noté $z = a + ib$ où $i^2 = -1$. On définit $\Re(z) = a$ et $\Im(z) = b$ et le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2.2 Représentations d'un nombre complexe

— *Algébrique* : $z = a + ib$.
— *Trigonométrique* : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
— *Exponentielle* : $z = re^{i\theta}$.
— *Géométrique* : z est représenté par le point (a, b) dans le plan complexe.

2.3 Racines d'un nombre complexe

2.3.1 Racines carrées et équation du second degré

Pour $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$), les solutions sont données par la formule quadratique dans $\mathbb{C}$:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2.3.2 Racines n-ièmes

Si $z = re^{i\theta}$, ses racines n-ièmes sont

$$z_k^{1/n} = r^{1/n} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Chapitre 3

Espaces vectoriels

3.1 Définition

Un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** est un ensemble E muni d'une addition $(u, v) \mapsto u+v$ et d'une multiplication par un scalaire $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ satisfaisant les axiomes usuels (associativité, commutativité de l'addition, existence de 0, etc.).

3.2 Base et dimension

Une famille $(v_i)_{i \in I}$ est *libre* si aucune combinaison linéaire nulle n'est non triviale. C'est une *base* si elle est libre et génératrice. La *dimension* d'un espace vectoriel de base finie est le nombre d'éléments de la base.

3.3 Applications linéaires, noyau, image, rang

Une application $f : E \to F$ entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels est *linéaire* si

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Le *noyau* est $\ker f = \{u \in E \mid f(u) = 0\}$ et l'*image* est $\operatorname{Im} f = \{f(u) \mid u \in E\}$. Le *rang* est $\dim \operatorname{Im} f$. On a le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$