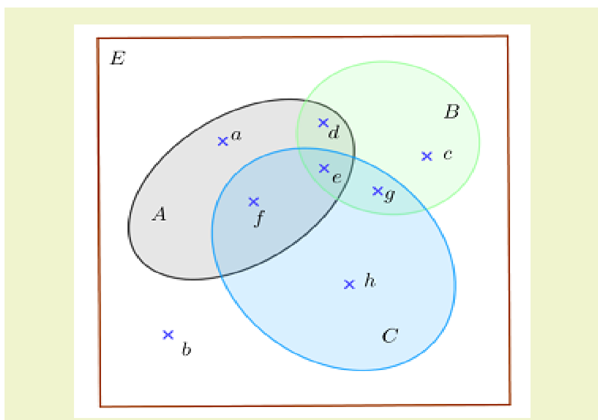
Université de Jijel Octobre 2025
Faculté des sciences et de la technologie
1^{ere} année ST

Série de TD N^0 01

IEnsembles et Relations

- Définir **l'inclusion**, **l'intersection**, **l'union**, **la différence**, **le complémentaire** et **la différence symétrique** à l'aide de dessins d'ensembles simples.
- Donner des exemples avec les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$.

Exercise 1 *On considère le diagramme de **Venn** suivant, avec A, B, C trois parties d'un ensemble E, et a, b, c, d, e, f, g, h des élements de E*



Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

$$1) g \in A \cap \bar{B},\ 2) g \in \bar{A} \cap \bar{B},\ 3) g \in \bar{A} \cup \bar{B},\ 4) f \in C - A,\ 5) e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

$$6)\ \{h, b\} \subset \bar{A} \cap \bar{B},\ 7)\ \{a, f\} \subset A \cup C$$

Exercise 2 *Soit A, B, C trois sous ensembles de E, montrer:*

$$(A^c)^c = A,$$

$$\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B \text{ et } \complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B,$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$\complement_E A = \bar{A} = A^c$ *c'est le complémentaire de A dans E.*

Exercise 3 *Relation d 'quivalence*

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par

$$(x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y') \Leftrightarrow xy' - x'y = 0.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer les classe d'équivalence de $(2, 3)$.

Exercise 4 *Relation d'ordre. $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, dans A on définit les deux relations suivantes*

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ *devise* y $\qquad\qquad$ $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x$ *et* y *sont premiers entre eux.*

Etudier $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

Exercise 5 Supplmentaire*: **Différence symétrique.** Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On appelle* différence symétrique *de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E défini par :*

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B / \ x \notin A \cap B\}$$

1) Interpréter les éléments de $A\Delta B$.
2) Montrer que:

$$A\Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A),$$

3) Calculer

$$A\Delta A, A\Delta\varnothing, A\Delta E, A\Delta C_E A.$$

4) Démontrer que pour tous A, B, C sous ensembles de E,

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C).$$

Exercise 6 Supplmentaire *Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, la relation suivante :*

$$A\mathcal{R}B \text{ si } A = B \text{ ou } A = \bar{B},$$

où $\bar{B}$ est le complémentaire de B (dans E). Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercise 7 Supplmentaire *On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation notée $\prec$ définie par*

$$(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

Démontrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre est-il total?