Introduction :

Un régime est dit permanent (ou stationnaire ou établit) lorsqu'en tout point d'un fluide tout les paramètres et, en particulier la vitesse, na varient pas dans le temps sans avoir pour autant la même valeur en chaque point. Lorsque la vitesse est nulle, le fluide est au repos et le régime est dit statique. Lorsque la vitesse est constante en un point d'un fluide sans être nulle, le régime est dynamique. Lorsqu'en un point de système, la vitesse évolue au cours du temps, le régime est transitoire et cet état est complexe à étudier.

Un fluide est soumis à deux types de forces :

- Les forces de volume, qui agissent sur le centre d'inertie de la particule du fluide (forces de pesanteur, forces d'accélération, poids, forces électrique…)
- Les forces de surface qui s'exercent sur la surface de la particule (forces de pression, forces de frottement de viscosité, forces générées par la turbulence).

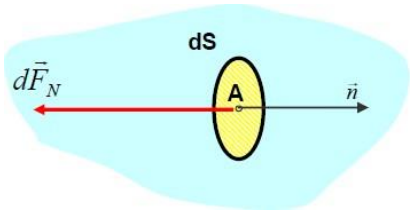
La statique des fluides est donc l'étude des fluides au repos. Dans ces conditions, elle ne fait pas de différences entre les fluides parfaits et les fluides réels. Elle est basée sur des principes comme l'équation fondamentale de la statique, le principe de Pascale et le principe d'Archimède.

Lois fondamentales de la statique

Pression

Un fluide immobile exerce sur les parois du récipient qui le contient une force normale à sa surface. Par définition, la pression, P, est la force exercée sur l'élément de surface appartenant à un solide immergé dans le fluide (d $\vec{f} = P d\vec{S}$ *avec* d$\vec{f}$ *perpendiculaire* à $d\vec{S}$ *et orienté vers le solide*) , est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface.

Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :



$$P_A = \frac{\left\| \overrightarrow{dF_N} \right\|}{dS}$$

Où :

dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

$\vec{n}$: Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

$\overrightarrow{dF_N}$: Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

P_A : pression en A (en Pascal),

Sur la surface de centre A, d'aire dS, orientée par sa normale extérieure $\vec{n}$, la force de pression élémentaire $\overrightarrow{dF}$ s'exprime par :

$$\overrightarrow{dF_N} = -P_A.dS.\vec{n}$$

Dans un fluide homogène au repos, la pression en un point quelconque est la même sur tous les éléments de surface, quelle que soit l'orientation de ceux-ci.

Divers type de pression

On distingue en réalité plusieurs pressions :

- ***Pression atmosphérique (p_{atm}) :*** appelée aussi pression barométrique qui est la pression exercée par l'atmosphère à la surface de la terre. Au niveau de la mer est de 1,013bar (760 mm de mercure). La valeur de cette pression diminue lorsque l'altitude augmente. Elle varie tous les jours légèrement: elle est néanmoins toujours voisine de 1 bar.

1 bar = 10^5 Pa = 1000 mbar ≈ 750 mm de mercure ≈ 0,987 atm

1Pa= $1N/m^2$= $1kg/m.S^2$

- ***Pression absolue(P_a) :*** qui est la pression mesurée par rapport au zéro absolu de pression (c'est à-dire l'absence totale de matière). Elle est toujours positive.
- ***pression relative(P_r) :*** La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure: cette pression peut donc prendre une valeur positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou une valeur négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique.

$$P_a = P_r + P_{atm}$$

- ***La pression différentielle:*** qui représente la différence entre la valeur de la pression étudiée et une pression de référence. Elle peut être aussi la différence de pression mesurée entre deux points quelconques d'un système.
- ***La dépression :*** est la pression en dessous de la pression atmosphérique (c'est une pression relative négative).

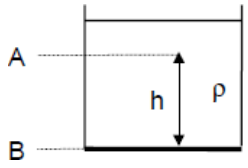
Les formules établies par la suite font toute référence à des pressions absolues.

Équation fondamentale de la statique des fluides

On considère un liquide immobile à l'intérieur d'un récipient; la pression en tous les points du liquide situés sur un même plan horizontal est identique. Les points A et B étant sur une verticale, le principe s'écrit:

$$P_B - P_A = \rho.g.h$$

Pa ; $Kg.m^{-3}$; m ; $9,8\ N.kg^{-1}$



Démonstration : pour un fluide en équilibre, la somme des forces qui s'exercent sur ce fluide doit être vectoriellement nulle.
Considérons un élément de fluide.
Les forces exerçant sur les cotés se composent, donc puisque le fluide est en équilibre, on peut écrire :

$$\vec{P} + \overrightarrow{F_{A/fluide}} = \overrightarrow{F_{B/fluide}}$$

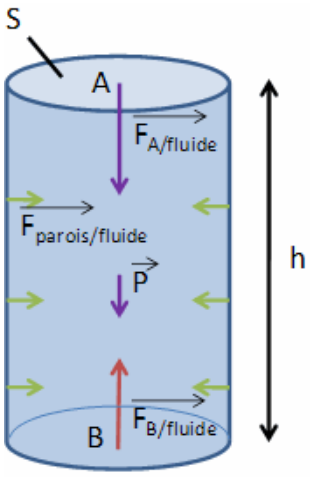
Or $P = m.g = \rho.V.g = \rho.h.S.g$ $\quad F_{A/fluide} = P_A.S$ $\quad F_{B/fluide} = P_B.S$

Donc

$$\rho.h.S.g + P_A.S = P_B.S$$

Donc

$$P_B - P_A = \rho.h.g$$

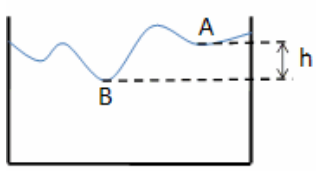


Surface de niveau

a) Surface libre d'un liquide

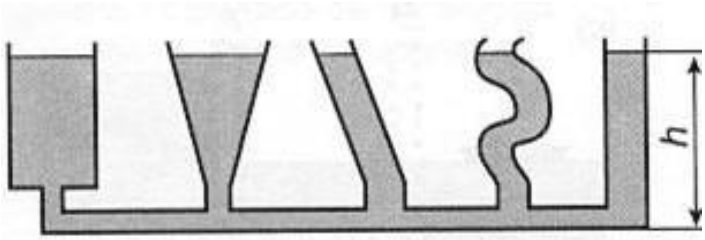
$P_A=P_B=P_{atm}$ donc $P_B-P_A= \rho.g.h=0$ donc h=0

La surface libre d'un liquide au repos est plane et horizontale

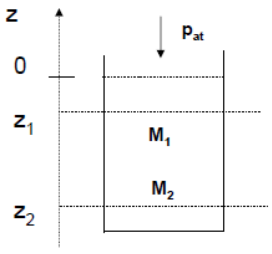


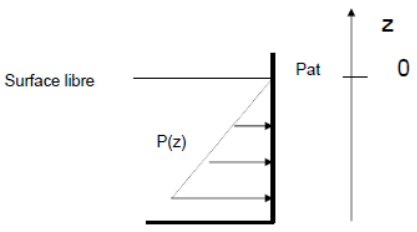
b) vases communicants

Les surfaces libres d'un liquide au repos dans des vases communicants de forme quelconque sont situées dans un même plan horizontal.
Dans un liquide au repos, la pression est la même en tous les points situés à la même profondeur.



c) dans un liquide au repos, la pression croit de haut en bas





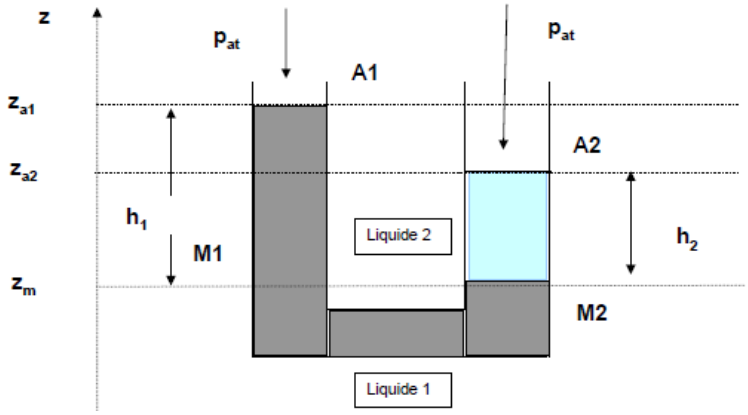
$p_{M1} + \rho\, g\, z_1 = p_{at} + 0$ donc $p_{M1} = p_{at} - \rho\, g\, z_1$

$p_{M2} + \rho\, g\, z_2 = p_{at} + 0$ donc $p_{M2} = p_{at} - \rho\, g\, z_2$

$z < 0$ donc $p_{M1} > p_{at}$ et $p_{M2} > p_{at}$

et $p_{M2} > p_{M1}$ car $z_2 > z_1$

d) cas de 2 fluides ayant des masses volumiques ρ_1 et ρ_2 différentes



$p_{M1} + \rho_1\, g\, z_m = p_{A1} + \rho_1\, g\, z_{a1}$ donc $p_{M1} = p_{A1} + \rho_1\, g\, (z_{a1} - z_m)$

$p_{M2} + \rho_2\, g\, z_m = p_{A2} + \rho_2\, g\, z_{a2}$ donc $p_{M2} = p_{A2} + \rho_2\, g\, (z_{a2} - z_m)$

$P_{M1}=P_{M2}$ car M_1 et M_2 sont situés sur une même isobare

$p_{A1} = p_{A2} = p_{at}$ Donc $\rho_2\,(z_{a2} - z_m) = \rho_1\,(z_{a1} - z_m)$

$\rho_2\, h_2 = \rho_1\, h_1$

si $h_1 > h_2 \rightarrow \rho_1 < \rho_2$

e) <u>Baromètre de Torricelli</u>

Cet instrument permet de déterminer la pression atmosphérique.

Le baromètre est composé d'un tube de verre contenant du mercure et dont l'extrémité ouverte (en bas) repose dans un bassin rempli de mercure. Une échelle graduée permettant de lire la pression se trouve sur le tube de verre.

Le principe physique du fonctionnement du baromètre est l'équilibre des forces. La colonne de mercure contenue dans le tube cherche à descendre sous l'effet de son poids. Cependant, l'air environnant pousse sur le mercure dans le bassin. La colonne de mercure cesse de bouger lorsque ces deux forces de poussée sont égales. Lorsque la pression de l'air environnant augmente, elle pousse sur le mercure dans le bassin et fait remonter une certaine quantité de mercure dans le tube de verre. De façon contraire, une baisse du mercure dans le tube sera causée par une diminution de la pression atmosphérique. En observant la hauteur de la colonne de mercure dans le tube, nous disposons donc d'une mesure de la pression de l'air.

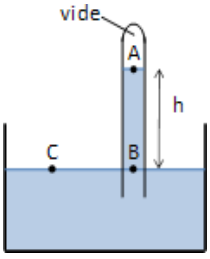
Et alors, Torricelli observe que le mercure ne s'écoule pas dans le bassin, et qu'il en reste toujours environ 76 cm dans le tube, et ce, quelle que soit la hauteur du tube. Il en déduit alors que c'est l'air qui fait pression sur le bassin et empêche le tube

de se vider. C'est-à-dire que la pression de l'air contrebalance le poids du mercure. le baromètre à mercure.

$P_B - P_A = \rho g h$ Or $P_B = P_C = P_{atm}$ et $P_A = 0$ Donc $\boxed{P_{atm} = \rho g h}$

Pour le mercure $\rho_{mercure} = 13546\ kg.m^{-3}$, donc $h = \frac{P_{atm}}{\rho g} = \frac{101325}{13546 \times 9,81} \approx 0,762\ m$

Pour l'eau $\rho_{eau} = 1000\ kg.m^{-3}$, donc $h = \frac{P_{atm}}{\rho g} = \frac{101325}{1000 \times 9,81} \approx 10,3\ m$



Le principe de Pascal

Dans un liquide en équilibre de masse volumique uniforme, Une pression externe appliquée à ce fluide confiné à l'intérieur d'un récipient fermé est transmise intégralement à travers tout le fluide.

Supposons qu'au point G_1 intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $P_1 + \Delta P_1$. ΔP_1 étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression ΔP_2 qui en résulte en G_2.

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre G_1 et G_2 pour le fluide.

à l'état initial: $P_2-P_1=\rho gh$

à l'état final : $(P_2+\Delta P_2)-(P_1+\Delta P_1)= \rho gh$

En faisant la différence entre les deux équations on obtient :

$\Delta P_2-\Delta P_1=0$ D'où $\Delta P_2=\Delta P_1$

LA POUSSEE D'ARCHIMEDE

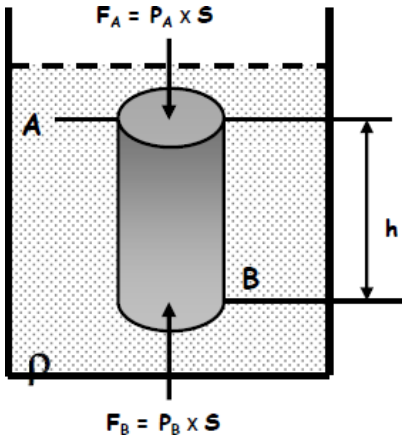
Tout corps plongé dans un fluide, subit de la part de celui-ci une poussée verticale, dirigée de bas en haut et dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé par ce corps.

L'expression "***fluide déplacé***" signifie un volume de fluide égal à celui de l'objet **immergé**, ou de la partie de l'objet qui est submergée quand celui-ci flotte.

Cette poussée vers le haut s'explique par le fait que, dans un fluide, la pression augmente avec la profondeur. Par conséquent, la pression agissant sur la surface inférieure d'un objet immergé est plus grande que celle qui s'exerce sur sa surface supérieure.

Considérons un cylindre de hauteur h dont les surfaces inférieures et supérieures ont une aire S et qui est entièrement immergé dans un fluide de masse volumique ρ.

Le fluide exerce contre la surface supérieure de ce solide une pression $P_A= \rho.g.h_A$ dont la force $F_A = P_A.S$ est orientée vers le bas. Il exerce également sur le fond du cylindre une force vers le haut égale à $F_B = P_B.S = \rho.g.h_B.S$. Les forces exercées par le fluide sur la surface latérale s'équilibrent parfaitement.



L'intensité de la force résultante, appelée poussée d'Archimède A, est donc égale à :

$$A = F_B - F_A = P_B S - P_A S = \rho g(h_B - h_A)S = \rho g h S$$

$$= \rho g V_{immergé}$$

Or $\rho g V_{immergé}$ est le poids du fluide déplacé par le solide.

En résumé, la poussée d'Archimède A ***agissant sur un corps plongé dans un fluide en équilibre est une force verticale vers le haut dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé.***

$$\mathbf{A = \rho_{fluide}.g.V_{immergé}}$$

Unité SI de la poussée d'Archimède : le newton (N)

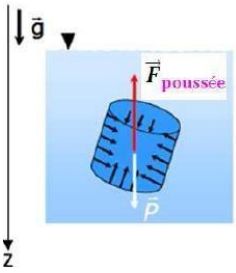
Si l'objet est totalement immergé, la poussée d'Archimède s'applique au centre de gravité de celui-ci. Par contre, si l'objet flotte à la surface, le point d'application de la poussée d'Archimède sera ***le centre de gravité du volume immergé*** de l'objet, appelé ***centre de poussée***.

- ***LE POIDS APPARENT, LA FLOTTABILITE***

Le poids apparent F_{Papp} est la résultante entre le poids F_P d'un corps et la poussée d'Archimède A . Par conséquent : $F_{Papp} = F_P + A$

Si on choisit un sens positif vers le bas, cette relation devient : $\mathbf{F_{Papp} = F_P - A}$

Coule ou flotte ?



Bilan des forces :

$$\vec{F}_{poussée} + \vec{P}_{solide} = \vec{0}$$

$$volume\ total = volume\ immergé + volume\ émergé$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{poussée} = -\rho_f.\vec{g}.V_{imm} \\ \vec{P}_{solide} = m_s.\vec{g} = \rho_s.\vec{g}.V_{total} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\rho_f.V_{imm} + \rho_s.V_{total} = 0 \\ \rightarrow \quad \dfrac{V_{imm}}{V_{total}} = \dfrac{\rho_s}{\rho_f} \end{cases}$$

Le poids est plus grand que la poussée d'Archimède. Le corps va descendre vers le bas. Corps qui coule

$$\begin{array}{rccc} & P & > & \pi \\ \Leftrightarrow & \rho_{corps} \cdot g \cdot V & > & \rho_{liq.} \cdot g \cdot V \\ \Leftrightarrow & \rho_{corps} & > & \rho_{liq.} \end{array}$$

Le poids est plus petit que la poussée d'Archimède. Le corps va monter vers le haut. Corps qui nage

$$\begin{array}{rccc} & P & < & \pi \\ \Leftrightarrow & \rho_{corps} & < & \rho_{liq.} \end{array}$$

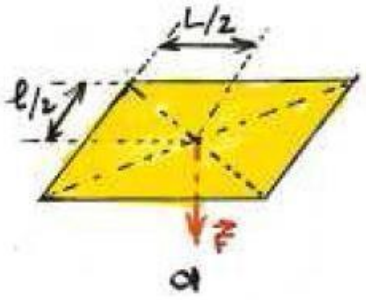
Le poids est égal à la poussée d'Archimède. Le corps va rester entre deux eaux. Corps qui flotte

$$\begin{array}{rccc} & P & = & \pi \\ \Leftrightarrow & \rho_{corps} & = & \rho_{liq.} \end{array}$$

Calcul des forces de pression

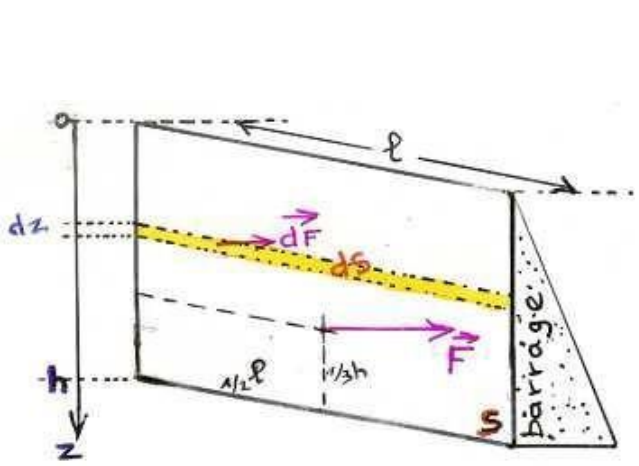
a) Surface plane horizontale

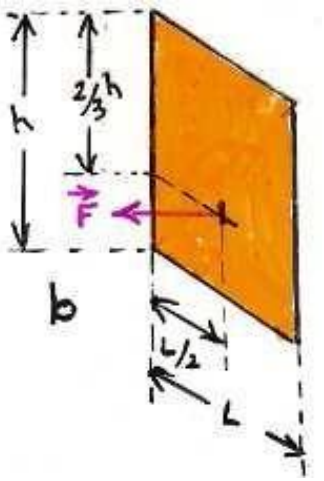
En chaque point de la surface (S), la pression est identique, elle est uniforme (P = ρ.g.h). La résultante des forces pressantes exercées par le fluide sur la paroi a pour norme : F = P.S.



b) Surface plane verticale

La pression augmente linéairement en fonction de la profondeur. Pour calculer la norme de la résultante des forces pressantes (F = ℓ .h) s'exerçant sur la paroi, comme P varie...il faut envisager un *calcul intégral*.





A la profondeur z la pression due à l'eau est p = ρ.g.z. Cette pression p peut être considérée constante sur une petite profondeur dz. La force élémentaire *dF* s'exerçant sur un petit élément de surface dS (ℓ .dz) a pour norme : dF = p.dS = ρ.g.z.ℓ.dz

$$F = \int dF$$

$$F = \int \rho.g.z.\ell.dz = \rho.g.\ell.\int_0^h z.dz$$

$$F = \rho.g.\ell.\left(\frac{1}{2}z^2\right)_0^h$$

$$F = \rho.g.\ell.\frac{1}{2}.h^2 = \rho.g.\frac{h}{2}.\ell.h = P_{mi\text{-}hauteur}.S$$

Centre de poussée

Le centre de poussée due à la pression d'un liquide sur une paroi est le point d'application de la résultante des forces de pression sur cette paroi. On connaît sa position par rapport à l'origine du moment résultant en calculant le rapport du moment à la résultante.

Pour la paroi horizontale, le chargement étant symétrique, le centre de poussée est au milieu de cette paroi

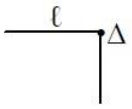
Pour les parois verticales, on montre aisément que le centre de poussée est à une profondeur de 2/3 de la hauteur de la paroi, vis-à-vis de la surface libre :

Pour un liquide au repos, la variation de la pression avec la profondeur est linéaire, donc une épure de pressions peut représenter la force de poussée hydrostatique.
Donc la force de poussée ne sera que le volume de l'épure des pressions, et le centre de poussée le centre de gravité de l'épure.

$$Pourquoi\ \frac{2}{3}\ ?$$

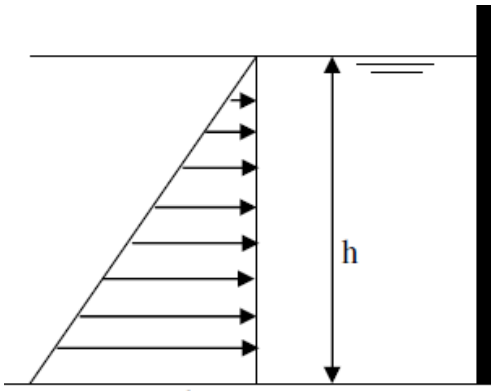
$$M_{\overline{dF}/\Delta} = dF.z\ ;\ \Delta\ étant\ l'axe :$$

$$M_{\overline{dF}/\Delta} = \rho.g.z.\ell.z^2.dz$$



$$M_{\overline{F}/\Delta} = \int_0^h \rho.g.\ell.z^2.dz = \rho.g.\ell.\int_0^h z^2.dz = \rho.g.\ell.\left(\frac{1}{3}z^3\right)_0^h$$

$$(F = \frac{1}{2}\rho.g.\ell.h^2) \quad M_{\overline{F}/\Delta} = \frac{2}{3}F.h = F.\frac{2}{3}h$$



Fig( ) : Epure des pressions

$$a_V = \frac{M_{F_v/SL}}{F_V}$$

$$\mathbf{a_V = \frac{2}{3} \cdot h}$$

Le centre de poussée CP est déterminé en utilisant le principe des moments :
Qui stipule que la somme des moments des forces exercées par rapport à un axe est égale au moment de la résultante de ces forces par rapport au même axe.

$\int h^2 dS = I_0$: C'est le moment d'inertie de la surface par rapport à la surface libre.

$F=\rho\ g\ h_G\ S$ et $F.h_c = \rho.\ g.I_0 \Rightarrow \rho\ g\ h_G\ S\ h_c = \rho\ gI_0 \Rightarrow h_c = I_0/h_G\ S$

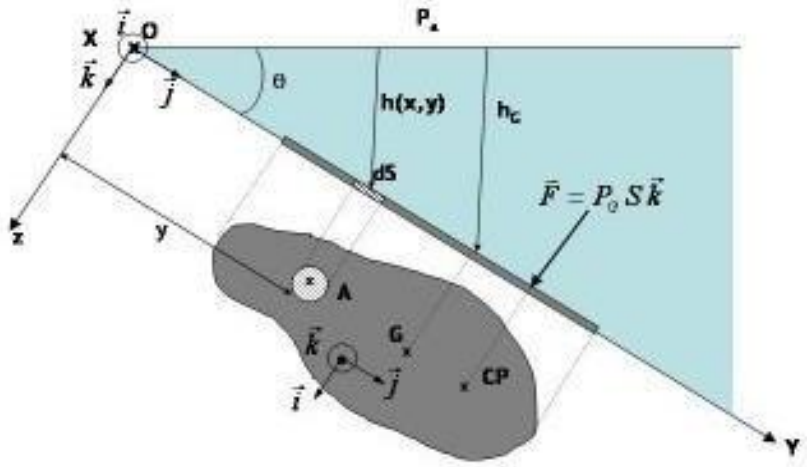
Suivant le théorème des axes parallèles : $I_0 = I_G + Sh_G^2$

I_G : est le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité.
Si on remplace, on trouve :

$$h_C = \frac{I_G + Sh_G^2}{Sh_G} = h_G + \frac{I_G}{Sh_G}$$

On remarque que la position du centre de poussée est indépendante du poids volumique du liquide

c) Forces de pression sur une surface plane inclinée



La figure représente une plaque plane de forme quelconque totalement immergée dans un liquide de masse volumique ρ. La plaque est inclinée de manière arbitraire d'un angle θ de sorte que la pression qu'elle subit varie. Si on considère une surface élémentaire ***ds*** quelconque située à une profondeur h de la surface du liquide sur cette plaque, la pression qu'elle subit est $P=P_a+\rho gh$, par conséquent une force ***dF*** telle que:

$dF = P.dS = (P_a+\rho.g.h)dS = P_a.dS + \rho.g.h.dS$

La force résultante F est égale à l'intégrale de dF sur toute la surface :

$dF = \int_S P_a dS + \int_S \rho.g.h.dS$ or $h = y\sin\theta$ d'ou:

$$F = P_a.S + \int_s \rho.g.y.sin\theta.dS = P_a.S + \rho.g.sin\theta \int_s y.dS$$

Le terme $\int_S ydS$ représente le '' ***Moment Statique*** '' de la surface dS par rapport à OX : $\int_S ydS = y_G S$ avec y_G : ordonnée de centre de gravité de la surface dS.

L'expression de F devient : $F= P_a.S+ \rho.g.sin\theta.Y_G.S$

Et comme $sin\theta.Y_G=h_G$: profondeur du centre de gravité de la surface dS :

$F= P_a.S+ \rho.g.h_G.S$

En général, la pression P_a est négligée et donc l'expression finale de F devient :

$F=\rho.g.h_G.S$

Position du point d'application de la Force de Pression :

Déterminons $\mathbf{h_D}$, la profondeur du point d'application de la force résultante F :

Pour cela, utilisons le principe des moments : $M_o F = \sum_{AB} M_i$ avec :

$M_o F = F.y_D$ et $\sum_{AB} M_i = \int_{AB} ydF = \int_{AB} y.\rho gy \sin\alpha dA = \int_{AB} \rho g y^2 \sin\alpha dA = \rho g \sin\alpha \int_{AB} y^2 dA$

Le terme $\int_{AB} y^2 dA$ représente le « moment d'inertie » de la surface dS par rapport à l'axe OX= I_{ox}

On aura donc : $\rho g \sin \alpha y_D A = \rho g \sin \alpha I_{ox}$ et donc $y_D = \frac{I_{ox}}{y_c A}$

Remarque **:** Utilisation du théorème de Huygens :

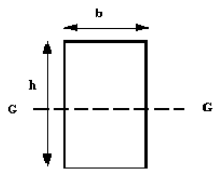
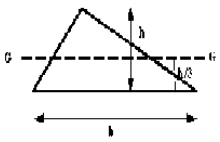
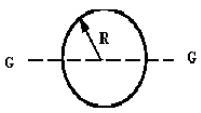
Ce théorème nous permet d'écrire que : $I_{ox} = I_{cc} + y_c^2 A$ avec :
$\mathbf{I_{cc}}$: Moment d'inertie de la surface dS par rapport à un axe passant par son centre de gravité C .

Dans ce cas, la formule précédente devient : $y_D = y_c + \frac{I_{cc}}{y_c A}$

$$Y_C = \frac{h_C}{\sin(\theta)}, Y_G = \frac{h_G}{\sin(\theta)}$$

On trouve donc : $h_C = \frac{I_G \sin^2(\theta)}{h_G S} + h_G$

Le tableau suivant résume les moments d'inertie de quelques surfaces particulières :

Type	Surface	Moment d'Inertie I_{CC}
Rectangle 	bh	$\frac{bh^3}{12}$
Triangle 	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$
Cercle 	πR^2	$\frac{\pi R^4}{4}$