1. العاملي

n عدد طبيعي غير معدوم

عاملي العدد n هو العدد الطبيعي الموجب الذي نرمز له ب n! و يقرا n عاملي و المعرف كما يلي

$$n! = n \times (n\text{-}1) \times (n\text{-}2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

ملاحظة: نقبل اصطلاحا 0!=1 و 1!=1

مثال :

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

خواص:

ليكن *n* و k عددين طبيعيين حيث n>k لدينا

- $(n+1)! = (n+1)n!$
- $(n+k)! = n! \times (n+1) \times (n+2) \ldots \times (n+k)$
- $\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2) \times \ldots \times n$

البرهان

1. من تعريف العاملي لدينا

$$(n+1)! = (n+1) \times \underbrace{n \times (n\text{-}1) \times (n\text{-}2) \times \ldots \times 2 \times 1}_{n!} = (n+1)n!$$

2. لدينا

$$(n+k)! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n\text{-}1)n}_{n!}(n+1)(n+2)\ldots(n+k)$$

3. لدينا

$$\frac{n!}{k!} = \frac{n \times (n\text{-}1) \times (n\text{-}2) \times \ldots (k+1)k!}{k!}$$

و منه

$$\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2) \times \ldots \times n$$

مثال: احسب مايلي

$$6!\,,\quad 7!,\qquad \frac{13!}{11!}$$

لدينا

$6! = 6 \times 5! = 6 \times 120 = 720$

$7! = (5+2) = 5! \times (5+1) \times (5+2) = 120 \times 6 \times 7 = 5040$

$\frac{13!}{11!} = \frac{13 \times 12 \times 11!}{11!} = 156$

2. الترتيبة

عدد طرق اختيار k عنصر مختلف من بين n عنصر مع ترتيبها يعطى بالعلاقة:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n\text{-}k)!}$$

يسمى العدد A_n^k بترتيبة ذات k عنصر من بين n عنصر

ملاحظة: في حالة k=n, نسمي تبديلة ذات n عنصر هو عدد طرق ترتيب n عنصر و يساوي $A_n^n=n!$

خواص:

ليكن *n* و k عددين طبيعيين حيث n>k لدينا

1. $A_n^0 = 1$

دينا

2. $A_n^n = A_n^{n\text{-}1} = n!$
3. $A_n^{k+1} = (n\text{-}k)A_n^k$

البرهان

من تعريف الترتيبة, لدينا

1. $A_n^0 = \frac{n!}{(n\text{-}0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

2. $A_n^n = \frac{n!}{(n\text{-}n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

$$A_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

$$3.\ A_n^{k+1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} = \frac{(n-k)n!}{(n-k)(n-k-1)!} = (n-k)\frac{n!}{(n-k)!} = (n-k)A_n^k$$

مثال: احسب مايلي

$$A_5^2, \quad A_{10}^{10}, \quad A_{10}^{0}, \qquad A_{25}^{13}$$

$$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

$$A_{10}^{10} = A_{10}^{0} = 1, \ \ A_{25}^{13} = \frac{25!}{12!}$$

3. التوفيقة

عدد طرق اختيار k عنصر بدون مراعاة الترتيب من بين n عنصر يعطى بالعلاقة

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

نسمي العدد C_n^k توفيقة ذات k عنصر من بين n عنصر

خواص: ليكن *n* و k عددين طبيعيين حيث n>k لدينا

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$
4. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
5. $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$

البرهان

من تعريف التوفيقة لدينا

$$1.\ C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{0! \times n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$2.\ \ C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,\big(n-(n-1)\big)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!\,1!} = n$$

$$3.\ C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,\big(n-(n-k)\big)!} = C_n^{n-k}$$

$$4.\ C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$
$$= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}$$

$$5.\ C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{k!} \times \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

مثال: احسب القيم

$$C_3^2,\ \ C_{10}^5 \quad C_{10}^0 \ + \ C_{10}^1,\ \ C_5^1 \times C_5^2$$

باستخذام التعريف و الخواص نجد

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3,\ \ C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\,5!} = 252,\ C_{10}^0 \ + \ C_{10}^1 = C_{10}^1 = 11, C_5^1 \times C_5^2 = 50$$

4. دستور ثنائي الحد

ليكن a و b عددين حقيقيين و n عدد طبيعي , فإن

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n$$

حالة خاصة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

لان

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2$$

$C_2^0 = C_2^2 = 1,\ C_2^1 = 2$ و

ملاحظة: إذا كان $\mathbf{b = a = 1}$ فان $\mathbf{2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n}$

مثال: انشر $\boldsymbol{(\alpha + 1)^3}$

لدينا

$$(\alpha + 1)^3 = C_3^0\alpha^3 1^0 + C_3^1\alpha^2 1^1 + C_3^2\alpha^1 1^2 + C_3^3\alpha^0 1^3$$

مع

$$C_3^0 = C_3^3 = 1, C_3^1 = 3, C_3^2 = 3$$

و منه

$$(\alpha + 1)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$$