TP01 – Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

Objectifs

• Observer les régimes d'oscillation libre : apériodique, critique et pseudo-périodique.

• Déterminer la résistance critique Rc.

• Mesurer le décrément logarithmique D , T_a et le facteur de qualité Q.

Étude Théorique

Les oscillations libres apparaissent lorsqu'un système, écarté de sa position d'équilibre, évolue sous l'effet de forces internes sans qu'aucune excitation extérieure permanente n'intervienne.
On retrouve ce type de mouvement aussi bien dans les systèmes mécaniques (masse–ressort) que dans les systèmes électriques (circuit RLC libre).

Dans cette étude, on analysera d'abord le comportement d'un système mécanique librement amorti, puis on formulera des questions théoriques concernant le système électrique équivalent.

Système mécanique : oscillateur amorti à un degré de liberté

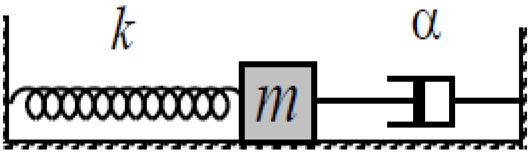


Figure 1 : Schéma du système masse–ressort–amortisseur

L'équation différentielle du mouvement s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + k x = 0$ (1)

En divisant par la masse m, on obtient :

$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (2) avec $\lambda = \alpha/(2m)$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

La résolution conduit à l'équation caractéristique :

$s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2 = 0.$ (3)

Le discriminant $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$ permet de distinguer trois régimes :

a) Régime apériodique (fortement amorti) $\lambda > \omega_0$:

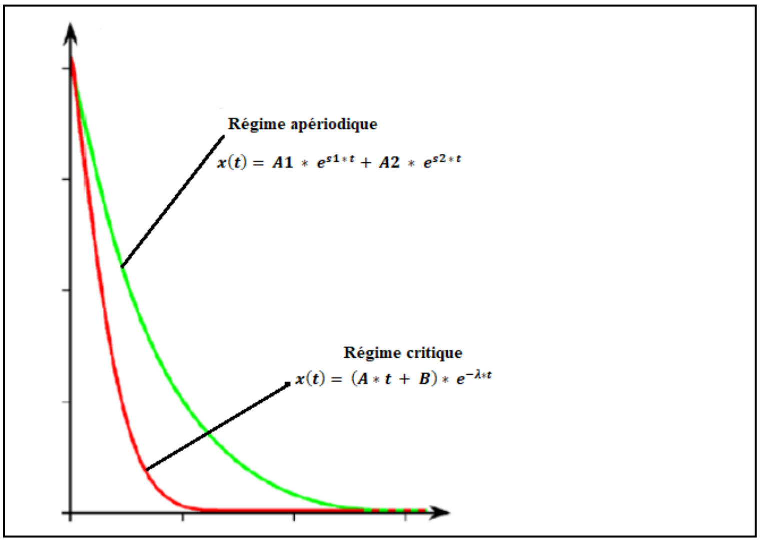
$s_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

$$\boldsymbol{x(t) = A1 * e^{s1*t} + A2 * e^{s2*t}}$$

b) Régime critique $\lambda = \omega_0$:

$$s_1 = s_2 = -\lambda$$

$$\boldsymbol{x(t) = (A * t + B) * e^{-\lambda * t}}$$



c) Régime pseudo-périodique (faiblement amorti) $\lambda < \omega_0$:

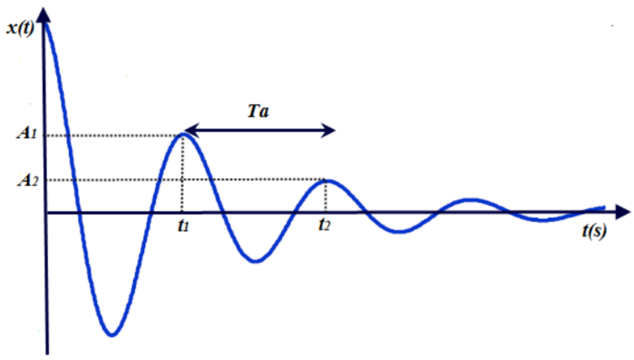
$$s_{1,2} = -\lambda \pm i * \sqrt{(\omega_0{}^2 - \lambda^2)} = -\lambda \pm i\,\omega_a$$

$$x(t) = C * e^{-\lambda * t} * \cos(\omega a * t + \varphi) \qquad \text{Avec} \quad \omega a = \sqrt{(\omega_0{}^2 - \lambda^2)} \;, Ta = \frac{2\pi}{\omega a}$$

Le décrément logarithmique et le facteur de qualité s'expriment respectivement par :

$$D = \left(\frac{1}{n}\right) * \ln\left(\frac{x(t)}{x(t + n*Ta)}\right) = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t + Ta)}\right) \quad (4)$$

$$Q = \frac{\omega a}{(2 * \lambda)} \quad (5)$$



2.Système électrique : questions théoriques

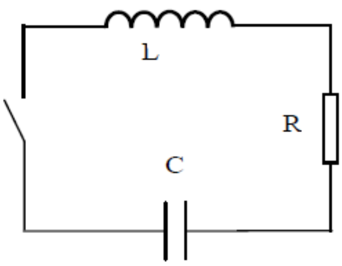


Figure 2 : Schéma du circuit RLC série

Travail avant la manipulation :

1. Donnez l'expression de la différence de potentiel aux bornes de chaque élément (R, L, C) en fonction de la charge q du condensateur.
2. Établissez l'équation différentielle du circuit et mettez-la sous la forme $\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$. Identifiez λ et ω_0 en fonction de R, L, C.
3. Montrez que le décrément logarithmique peut s'écrire $D = \lambda T_a$.
4. Pour les faibles amortissements ($\lambda \ll \omega_0$), démontrez que $Q = (1/R) \sqrt{L/C}$.
5. Montrez que la résistance critique séparant le régime oscillatoire du régime apériodique est $R_c = 2\sqrt{L/C}$.
6. Expliquez comment déterminer la valeur de L à partir de la mesure de Rc, en tenant compte de la résistance interne du GBF.

Étude Expérimentale

Équipement : Générateur basse fréquence (GBF), Résistance variable,Bobine d'inductance variable,Condensateur variable, Oscilloscope à double voie, Câbles de connexion.

Protocole expérimental

1. Réaliser le montage du circuit RLC série (voir Figure 3), R=100 Ω, L=10 mH et C=20nF.
2. Alimenter le circuit par un signal carré (f = 2 kHz, e = 1 V).
3. Observer la tension aux bornes du condensateur sur le canal CH1 de l'oscilloscope.
4. Faire varier la résistance R et observer les régimes d'oscillation.
5. Pour R = 100 Ω, relever les amplitudes successives pour calculer D et T_a.
6. Augmenter R jusqu'à obtenir le régime critique et déterminer Rc (±10 Ω).
7. Calculer $L = C R_c^2 / 4$ et son incertitude.
8. En déduire le facteur de qualité Q.

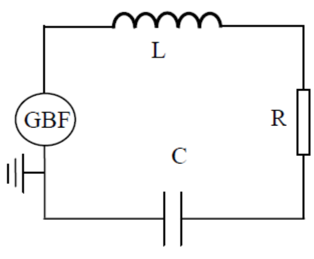


Figure 3 : Schéma du montage expérimental du circuit RLC sous excitation carrée