

TP02 – Oscillations forcées dans un circuit RLC série

Les oscillations forcées interviennent lorsqu'un système dynamique est soumis à une excitation externe périodique. Après la phase transitoire, le système atteint un régime permanent harmonique où la réponse a la fréquence de l'excitation.

Objectif du TP

L'objectif de ce travail pratique est d'étudier le comportement d'un circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale. On mettra en évidence les phénomènes de résonance, d'amortissement, ainsi que la variation de la phase et de l'amplitude en fonction de la pulsation de l'excitation. Une comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux sera également réalisée.

Étude Théorique

Le circuit RLC série est constitué d'une résistance R, d'une inductance L et d'un condensateur C connectés en série, et alimentés par un générateur basse fréquence (GBF) délivrant une tension sinusoïdale :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

L'équation différentielle régissant la charge q(t) du condensateur s'écrit :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_0 \cos(\omega t)$$

Analyse générale du système Cette équation correspond à celle d'un oscillateur harmonique amorti et forcé. La réponse du système est la somme de deux termes :

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t)$$

- $q_h(t)$: solution homogène (régime transitoire) • $q_p(t)$: solution particulière (régime permanent)

Solution homogène – Régime transitoire

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

On introduit : $\lambda = \frac{R}{2L}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Si $\lambda < \omega_0 \rightarrow$ régime pseudo-périodique : $q_h(t) = e^{-\lambda t}[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)]$, $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Si $\lambda = \omega_0 \rightarrow$ régime critique : $q_h(t) = (A + Bt)e^{-\lambda t}$

Si $\lambda > \omega_0 \rightarrow$ régime apériodique : $q_h(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$

Solution particulière – Régime forcé permanent

$$q_p(t) = q_0(\omega)\cos(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad q_p(t) = q_0(\omega)e^{i(\omega t + \phi)}$$

$$q_0(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{(L\omega^2 - 1/C)^2 + (R\omega)^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{R\omega}{1/C - L\omega^2}$$

en de fonction λ et ω_0

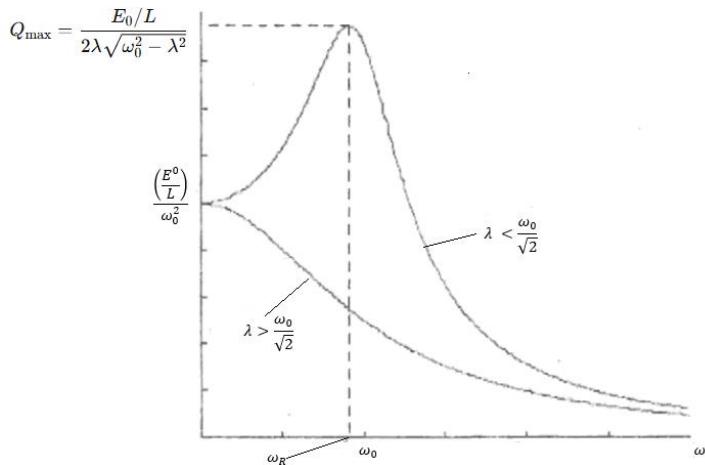
$$\text{Amplitude} \quad q_0(\omega) = \frac{E_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}}$$

$$\text{Déphasage} \quad \tan\phi = -\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Étude de l'amplitude $q_0(\omega)$ en fonction de pulsation ω

La charge $q_0(\omega)$ atteint un maximum lorsque $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$, $q_0(\omega) = \frac{E_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}}$, Le graphe

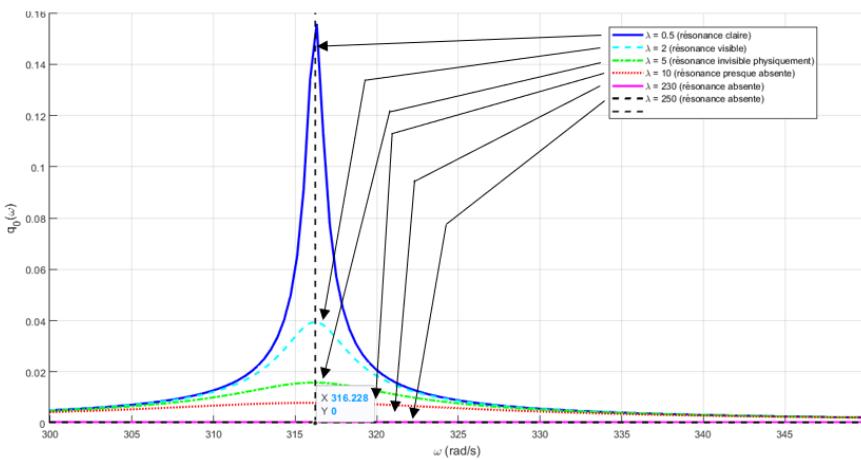
$q_0(\omega)$ montre un pic de résonance dont la largeur dépend de l'amortissement



$$Q_{\max} = \frac{\left(\frac{E^0}{L}\right)}{\left(2 \lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)}$$

Cette valeur n'est physiquement observable que pour des amortissements faibles $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

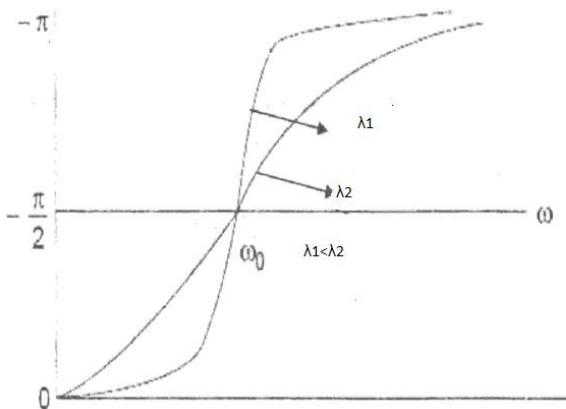
2. Étude de l'amplitude $q_0(\omega)$ en fonction de l'amortissement λ



$$Q_{\max} = \frac{\left(\frac{E^0}{L}\right)}{\left(2 \lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)}$$

L'amplitude est donc inversement proportionnelle à l'amortissement λ .

Etude du déphasage $\phi(\omega)$ en fonction de l'amortissement λ



À partir de la relation précédente :

$$\tan \phi = -\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Pour $\omega < \omega_0$: $\phi > 0$, la charge est en avance sur la tension.
- Pour $\omega = \omega_0$: $\phi = \pi/2$, quadrature parfaite.
- Pour $\omega > \omega_0$: $\phi < 0$, la charge est en retard.

Bande passante et facteur de qualité

Les pulsations ω_1 et ω_2 sont définies par : $Q(\omega_1) = Q(\omega_2) = Q_{max}/\sqrt{2}$

La largeur de bande : $B = \omega_2 - \omega_1 = 2\lambda$

Le facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\lambda}$

7. Questions théoriques (Travail avant la manipulation)

1. En partant de l'équation $Lq'' + Rq' + (1/C)q = E_0 \cos(\omega t)$, dérivez l'expression de l'amplitude $q_0(\omega)$ et du déphasage $\phi(\omega)$. puis Montrez que l'amplitude $q_0(\omega)$ peut s'écrire sous la forme :

$$q_0(\omega) = \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}}, \text{ Donnez l'expression de } a ?$$

2. Montrez que $q_0(\omega)$, est maximale pour la pulsation de résonance $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$, et précisez la condition d'observation de la résonance.

3. montrer que $\omega_2 - \omega_1 = 2\lambda$

Étude Expérimentale

Appareillage : Générateur de fonctions (GBF) capable de sortie sinusoïdale, Résistance variable (ou boîte à résistance), Condensateur, Bobine, Oscilloscope à double voie, Câbles et connexions.

Procédure expérimentale

1. Montez le circuit RLC série, $R=100 \Omega$, $L=10 \text{ mH}$ et $C=20 \text{ nF}$. et connectez le GBF, Placez CH1 sur la tension d'excitation $e(t)$ et CH2 sur la tension aux bornes du condensateur $V_C(t)$.
2. Réglez l'amplitude du GBF à 1 V, et la fréquence 10 kHz.
3. Balayez la fréquence du générateur et observez, à l'aide de l'oscilloscope en mode dual, l'évolution du déphasage entre les signaux $e(t)$ et $V_C(t)$.
4. Que représente la pulsation correspondant à un déphasage nul entre les deux signaux ? Comparez-la à la pulsation propre du circuit ω_0 .

5. Pour $R = 100 \Omega$, enregistrez $V_c = f(\omega)$ et la phase entre $e(t)$ et $V_C(t)$ pour plusieurs fréquences autour de la résonance .et répétez la mesure pour $R = 300 \Omega$.
6. Tracer les courbes $V_c = f(\omega)$ et $\Phi(\omega)$, Déterminez ω_R , ω_1 , ω_2 , la bande passante B et Q pour chaque valeur de R.

Tableau 1 — $R = 100 \Omega$

f (Hz)												
V_c (V)												
Phase φ (deg)												

Tableau 2 — $R = 300 \Omega$

f (Hz)												
V_c (V)												
Phase φ (deg)												

- Comparez les résultats entre $R = 100 \Omega$ et $R = 300 \Omega$ et commentez l'effet de l'amortissement sur l'amplitude et la largeur de bande.