

Chapitre I

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

1.1. Ensemble usuels de nombres

Notations :

- On note par $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- On note par $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs, c.-à-d. l'ensemble des entiers naturels et leurs opposés : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- On note par $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels, c'est l'ensemble des quotients $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers relatifs, avec q non nul : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\}$
- On note par $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels, il contient les nombres rationnels et les nombres irrationnels tel que $\sqrt{2}, \pi, \dots$
- Ces ensembles privés de 0 sont respectivement notés par : $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$

Remarque :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.2. Définition axiomatique de l'ensemble des nombres réels

1.2.1. Lois de composition interne

Déf : Une loi de composition interne notée $*$ sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E c.-à-d. pour tout couple $(x, y) \in E \times E$ on fait correspondre un élément de E noté $x * y$

$$* : E \times E \longrightarrow E$$

$$(x, y) \longmapsto x * y$$

Notation : On note $(E, *)$ pour désigner un ensemble E muni d'une loi de composition interne $*$

1.2.2 Axiomes de l'ensemble des nombres réels

On muni l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ de deux lois de composition interne, l'addition (+) et la multiplication ($\times$), les propriétés suivantes sont satisfaites:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

propriétés de l'addition:

- (+) est commutative: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$.
- (+) est associative: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément neutre $0 \in \mathbb{R}$ pour (+) tel que $0 + x = x + 0 = x$.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément symétrique noté $(-x) \in \mathbb{R}$ tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

propriétés de la multiplication:

- La multiplication est commutative: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \times y = y \times x$.
- La multiplication est associative:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \times y) \times z = x \times (y \times z).$$

- La multiplication est distributive par rapport à l'addition:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z).$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément neutre pour la multiplication $1 \in \mathbb{R}$, tel que: $1 \times x = x \times 1 = x$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un élément inverse noté x^{-1} tel que $x^{-1} \times x = x \times x^{-1} = 1$.

Conclusion: $(\mathbb{R}, +, \times)$ est appelé Corps Commutatif.

1.2.3 Axiome d'ordre:

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné il est muni d'une relation d'ordre totale ($\leq$) qui satisfait les propriétés suivantes:

- * $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ (réflexivité)
- * $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitivité)
- * $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymétrie)
- * $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ ou } y \leq x$ (ordre total)

1.2.4 Axiome de la borne supérieure et la borne inférieure

Déf := (Majordants et mineurs d'un ensemble)

Soient $A \subset \mathbb{R}, m, M \in \mathbb{R}$.

- * On dit que M est un **majordant** de A si: $\forall x \in A, x \leq M$.
Dans ce cas on dit que A est **majré**.
- * On dit que m est un **mineur** de A si: $\forall x \in A, x \geq m$.
Dans ce cas on dit que A est **minré**.
- * On dit que A est **borné** s'il est à la fois **majré** et **minré**.
C-à-d: $\exists m, M \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in A, m \leq x \leq M$.

Exemple:

1/ Soit $A = [3, 5]$

L'ensemble des majordants de A est $[5; +\infty[$ et l'ensemble des mineurs de A est $] -\infty, 3]$. Dans ce cas l'intervalle $[3, 5]$ est borné
2 et 3 sont deux mineurs de A puisque: $\forall x \in A, 2 \leq x$ et $3 \leq x$.
5 et 6 sont deux majordants de A puisque: $\forall x \in A, x \leq 5$ et $x \leq 6$.

2/ $B =] -\infty, 2]$ est **majré**,

L'ensemble des majordants de B est $[2; +\infty[$, mais il n'est pas borné car il n'est pas minré.

$$3) C = \{-2, -1, 0, 1, 4, 6\}$$

- 2 est un min dant de C puisque $\forall x \in C \quad -2 \leq x$.

6 est un maj dant de C puisque $\forall x \in C \quad x \leq 6$.

4) L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est min d' : $\forall x \in \mathbb{N} \quad x \geq 0$
mais n'est pas maj d' , donc $\mathbb{N}$ n'est pas borné.

Remarque:

1. Le maj dant et le min dant d'un ensemble A ne sont pas uniques.

2. Le maj dant et le min dant d'un ensemble A peuvent appartenir ou non à A.

Déf: (Maximum et minimum d'un ensemble).

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

* On dit que M est le plus grand élément de A (ou maximum de A)

ssi : $\left\{ \begin{array}{l} \text{M est un maj dant de A } (\forall x \in A \quad x \leq M) \\ \text{et} \\ M \in A \end{array} \right.$

et on note $\max(A) = M$.

On dit que m est le plus petit élément de A (ou minimum de A)

ssi : $\left\{ \begin{array}{l} \text{m est un min dant de A } (\forall x \in A \quad x \geq m) \\ \text{et} \\ m \in A \end{array} \right.$

et on note $\min(A) = m$.

Exemple:

1) Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne possèdent pas le plus grand élément.

2/ L'ensemble $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément $0 \in \mathbb{N}$
($\min(\mathbb{N}) = 0$ Car $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$ et $0 \in \mathbb{N}$)

3/ $A = [5, 8]$ possède un maximum et un minimum
 $\max(A) = 8$ puisque 8 est un majdrant de A et $8 \in A$.
 $\min(A) = 5$ puisque 5 est un mindrant de A et $5 \in A$.

4/ $B =]0, 6[$ ne possède ni maximum, ni minimum
 $\max(B)$ n'existe pas puisque il n'existe pas un majdrant de B qui appartient à B.
 $\min(B)$ n'existe pas puisque il n'existe pas un mindrant de B qui appartient à B.

5/ $C =]-3, 5]$ possède un maximum et ne possède pas de minimum.
 $\max(C) = 5$, et $\min(C)$ n'existe pas.

Remarque :

1. Le plus petit élément et le plus grand élément s'il existent ils sont uniques.
2. Le plus petit élément de A est un mindrant de A et le plus grand élément de A est un majdrant de A.
3. Un mindrant de A (respectivement majdrant de A) peut ne pas être le plus petit élément de A (respectivement plus grand élément de A) Car il n'est pas nécessairement dans A.

1.3 Quelques propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

Déf: (Valeur absolue)

La valeur absolue d'un réel x , notée par $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

propriété:

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et α :

1. $|x| \geq 0$.

2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $|x| = |-x|$

4. $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$

5. $|x| = \max(-x, x)$.

6. $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0: |x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$

7. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, |x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \alpha$ ou $x \leq -\alpha$.

8. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$

9. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$.

10. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x+y| \leq |x| + |y|$, inégalité triangulaire
avec l'égalité si x et y ont même signe

Remarque:

En général $|x+y| \neq |x| + |y|$

par exemple $|-3+5| = |2| = 2$

$|-3| + |5| = 3 + 5 = 8$

donc $2 \neq 8$.

pour avoir la droite réelle $\mathbb{R}$

$|x| \leq \alpha$ se signifie que x se situe entre $-\alpha$ et α

si $|x| \geq \alpha$:
soit $x \geq \alpha$ et positif, soit $x \leq -\alpha$ et négatif

Déf: (partie entière d'un nombre réel) relatif $n \in \mathbb{Z}$ $n \leq x < n+1$
 Soit x un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la partie entière de x . Nous le noterons $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Exemple:

$$\lfloor 11,12 \rfloor = 11, \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lfloor -4,33 \rfloor = -5, \lfloor -7 \rfloor = -7$$

propriété

- $\forall x \in \mathbb{Z} \quad E(x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) \leq x < E(x) + 1 \quad \text{ou} \quad x - 1 < E(x) \leq x$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x+n) = E(x) + n \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$

Déf: (Intervalle)

Les intervalles sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définies pour $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) par :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \quad (\text{Intervalle fermé})$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad (\text{Intervalle ouvert})$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \quad (\text{Intervalle semi ouvert à droite})$$

$$]b, a] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} \quad (\text{Intervalle semi ouvert à gauche})$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\} \quad (\text{Intervalle fermé non majoré})$$

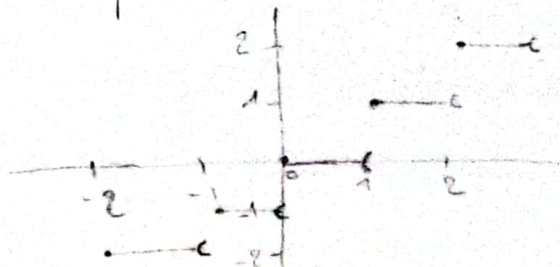
$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\} \quad (\text{Intervalle fermé non minoré})$$

On appelle la valeur $b-a$ dans le cas d'un intervalle fermé la longueur de l'intervalle.

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ la droite réelle

La courbe de la fonction partie entière

la fonction partie entière n'est pas une fonction continue sur $\mathbb{R}$



2.1 l'ensemble des nombres Complexes:

$$\mathbb{C} = \{ z : z = x + iy ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

- * z : est appelé nombre complexe.
- * i : est appelé l'unité imaginaire
- * L'ensemble $\mathbb{C}$ muni des deux opérations internes: l'addition et la multiplication $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un Corps Commutatif.

2.1 Définitions et propriétés:

2.1.1 Les nombres Complexes

Soit $z = x + iy$, un nombre complexe où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- * $x = \operatorname{Re}(z)$ est la partie réelle de z .
- * $y = \operatorname{Im}(z)$ est la partie imaginaire de z .
- * $\bar{z} = x - iy$ est le Conjugué de z .

Exemple:

$$z = -3 + 4i$$

$$-3 = \operatorname{Re}(z) \quad , \quad 4 = \operatorname{Im}(z)$$

$$\bar{z} = -3 - 4i \text{ est le Conjugué de } z.$$

soient deux nombres Complexes z et z' :

$$z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z').$$

2.1.2 Opérations sur les nombres Complexes

- * L'addition: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- * La soustraction: $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
- * La multiplication: $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- * La division:
$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$
$$= \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

Exemple:

$$\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{-4}{5} + i \frac{7}{5}$$

2.1.3 propriété

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

$$z + \bar{z} = 2x = 2\text{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2iy = 2\text{Im}(z)$$

$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

2.1.4 Module et argument d'un nombre complexe

Déf: Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est défini par: $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = r$.

N.B: le module d'un nombre complexe est toujours positif.

Exemple:

$$z = -3 + 4i$$

$$|z| = |-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

propriétés

$$\star |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\star ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ (inégalité triangulaire)}$$

$$\star |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

$$\star \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

$$\star |z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$$

$$\star |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$\star |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$$

$$\star |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

Déf: L'argument de z noté $\arg z$, est l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ définie par: $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$, $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$.

2.1.5 Forme trigonométrique, Forme exponentielle

Déf: On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z l'écriture: $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$.

Exemple:

Soient $z = 2 + 2\sqrt{3}i$, on a:

$$|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4.$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'écriture trigonométrique est donnée par: $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
tel que $\arg z = \theta = \frac{\pi}{3}$.

Déf: On appelle exponentielle complexe, on le note $e^{i\theta}$, le nombre complexe de module 1 est d'argument θ i.e.:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

* On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe z d'argument θ , l'écriture: $z = |z| e^{i\theta}$.

Exemple:

1. p.d.m $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

Donc: $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ donc $z = 4 e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

propriété:

pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a:

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{* Formule de Mûrve: } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

$$\text{* } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

Equations du second degré

On cherche les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation:

$$az^2 + bz + c = 0.$$

où a, b, c sont trois réels

nous avons trois cas:

* $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

* $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double réelle

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

* $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes z_1, z_2 (non réelles):

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple: Soit l'équation: $z^2 + z + 1 = 0$

Le discriminant: $\Delta = -3 = 3i^2$, d'où $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta} = i\sqrt{3}$

Donc les solutions de l'équation sont:

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Racine n-ième d'un nombre Complexe:

On appelle racine n-ième d'un nombre Complexe

$w = R e^{i\varphi}$ tout nombre Complexe z vérifiant $z^n = w$
tel que :

$$z^n = w \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = R e^{i\varphi}$$

الانتقال الأسّي

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\theta = \varphi + 2k\pi \\ \quad \quad \quad \text{avec } \theta \in [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = R^{\frac{1}{n}} \\ \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Donc w admet n racines qui sont les nombres Complexes :

$$z_k = \sqrt[n]{R} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{avec } k = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Exemple:

Résoudre $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$ dans $\mathbb{C}$.

$$z^4 = w, \quad w = R e^{i\varphi} = 8(-1 + i\sqrt{3}) = -8 + i8\sqrt{3}$$

$$|w| = |8(-1 + i\sqrt{3})| = 8 \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 8 \sqrt{1+3} = 16.$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{|w|} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{|w|} = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w = 16 e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \Leftrightarrow z^4 = r^4 e^{i4\theta}$$

$$\text{donc: } r^4 e^{i4\theta} = 16 e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{r^4} = \sqrt[4]{16} \\ \theta = \frac{2\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 16^{\frac{1}{4}} = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

Donc w admet n racines qui sont

$$z_k = 2 e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})} \quad \text{avec } k = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{pour } k=0: z_0 = 2 e^{i \frac{\pi}{6}} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i \quad \text{pour } k=2: z_2 = 2 e^{i(\frac{\pi}{6} + \pi)} = 2 e^{i \frac{7\pi}{6}} = 2 e^{i \frac{5\pi}{3}}$$

$$k=1: z_1 = 2 e^{i \frac{2\pi}{3}} = 2(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{pour } k=3: z_3 = 2 e^{i \frac{10\pi}{6}} = 2 e^{i \frac{5\pi}{3}}$$