

(Chapitre 02)

polynômes et fractions rationnelles

2.1: Généralités sur les polynômes

Définition 2.1.1: Nous appellerons polynômes à Coefficients réels toute fonction $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme:

$$x \mapsto p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

où n est un entier naturel, et $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ sont des nombres réels donnés appelés coefficients du polynôme.

Le nombre a_0 est appelé le terme Constant.

L'ensemble des polynômes à Coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 2.1.2: $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ est nul si et seulement si tous ses Coefficients sont nuls.

Définition 2.1.3: On appelle degré d'un polynôme non nul p , noté $\deg(p)$, la plus forte puissance de la variable x effectivement présente dans le polynôme.

Autrement dit, soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$,

si $a_n \neq 0$ alors $\deg(p) = n$.

Corollaire 2.1.4: Deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et si les Coefficients de leurs termes de même puissance sont égaux.

Opérations sur les polynômes:

Soient $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ et $q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ deux polynômes à Coefficient réels, alors:

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

En général, $\deg(p+q) \leq \max(\deg(p), \deg(q))$.

$$* p(x) - q(x) = \sum_{i=0}^n (a_i - b_i) x^i$$

tel que: $\deg(p+q) < \max(\deg(p), \deg(q))$

$$* p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^s \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) x^k$$

Théorème 2.1.5 : (Division euclidienne)

Etant donné un polynôme $A(x)$ et un polynôme non nul $B(x)$ il existe un couple unique $(Q(x), R(x))$ de polynôme tel que

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \quad \deg(R) < \deg(B)$$

$\uparrow$ Dividende $\uparrow$ Diviseur $\uparrow$ Quotient $\uparrow$ Reste.

Exemple:

$ \begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 2 \\ - (2x^4 + 2x^3 - 4x^2) \\ \hline 0 - 5x^3 + 9x^2 + 7x - 2 \\ - (-5x^3 - 5x^2 + 10x) \\ \hline 14x^2 - 3x - 2 \\ - (14x^2 + 14x - 28) \\ \hline -17x + 26 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 + x - 2 \\ \hline 2x^2 - 5x + 14 \end{array} $
---	---

Le quotient est donc $Q(x) = 2x^2 - 5x + 14$

$$R(x) = -17x + 26$$

On écrit: $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 2 = (x^2 + x - 2)(2x^2 - 5x + 14) + (-17x + 10)$
Définition 2.1.6 On dit que le nombre a est racine (ou zéro) du polynôme $p(x)$ si $p(a) = 0$.

Exemple:

1 et 2 sont deux racines du polynôme $p(x) = x^3 - 3x + 2$ puisque $p(1) = 0$ et $p(2) = 0$.

Définition 2.1.7 On dit que le polynôme non nul $p(x)$ est factorisable par $(x-a)$ (ou encore $p(x)$ est divisible par $(x-a)$) s'il existe un polynôme $q(x)$ tel que $p(x) = (x-a)q(x)$.

Théorème 2.1.8: Le polynôme $p(x)$ admet le nombre a pour racine si et seulement si $p(x)$ est divisible par $(x-a)$.

Corollaire 2.1.9: Si le polynôme $p(x)$ possède k racines distinctes $a_1, a_2, \dots, a_k$ alors $p(x)$ est divisible par $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)$.

2.2 Fractions rationnelles dans $\mathbb{R}[X]$

Définition 2.2.1: La fonction $f(x)$ est une fonction rationnelle si il existe deux polynômes $p(x)$ et $q(x)$ premiers entre eux tel que:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

et on a: $\deg(f) = \deg(p) - \deg(q)$.

• Si F s'écrit sous forme irréductible $\frac{p}{q}$, alors les zéros de F sont les zéros de p , les pôles de F sont les zéros de q .

Exemple 2.1.1: La fraction rationnelle définie pour tout x par:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2 - 5x + 5}{x + 3}$$

$$\deg(f) = 2 - 1 = 1.$$

2.2.1 partie entière d'une fraction rationnelle

Théorème 2.2.3: Soient deux polynômes $p(x)$ de degré m et $q(x)$ de degré n avec $m \geq n$. Alors, pour tout x tel que $q(x) \neq 0$, on peut écrire :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{q(x)}.$$

Où $E(x)$ est le quotient de la division euclidienne de $p(x)$ par $q(x)$ de degré $m-n$, $R(x)$ en est le reste, et $\frac{R(x)}{q(x)}$ est une fraction rationnelle. Le polynôme $E(x)$ est dit partie entière de $\frac{p(x)}{q(x)}$.

Exemple 2.2.4:

Soit la fraction rationnelle $\frac{5x^4 + 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$. En notant que 1 n'est pas racine du numérateur, on déduit que les polynômes sont premiers entre eux. pour $x \neq 1$, on a :

$$\begin{array}{r|l} 5x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 3x + 2 & x^2 - 2x + 1 \\ - 5x^4 - 10x^3 + 5x^2 & \hline 10x^3 - 5x^2 + 3x + 2 & \\ - 10x^3 - 20x + 10 & \hline 15x^2 - 7x + 2 & \\ - 15x^2 - 30x + 15 & \hline = 23x - 13 & \end{array}$$

deux polynômes premiers entre eux
c-à-d qu'ils n'ont pas de diviseurs communs

Ainsi: $\frac{5x^4 + 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = 5x^2 + 10x + 15 + \frac{23x - 13}{x^2 - 2x + 1}$

2.2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$:

Théorème 2.2.5: Soit f une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$.

On suppose que f s'écrit sous la forme:

$$f = E + \frac{R}{Q}$$

où: E, R et Q sont trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $R \neq 0$, $Q \neq 0$ et $\deg R < \deg Q$.

On suppose que Q admet la décomposition en éléments irréductibles suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_n)^{k_n} (x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1} (x^2 + b_2 x + c_2)^{l_2} \dots (x^2 + b_m x + c_m)^{l_m}$$

avec $b_i^2 - 4c_i < 0$, alors: il existe trois unique familles (A_{ij}) , (B_{ij}) et (D_{ij}) de réels telles que:

$$f(x) = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_{ij}x + D_{ij}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j}$$

$$f(x) = \frac{A_{11}}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{1n}}{x - a_1} + \frac{A_{21}}{(x - a_2)^{k_2}} + \frac{A_{22}}{(x - a_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{A_{2n}}{(x - a_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{A_{n1}}{(x - a_n)^{k_n}} + \frac{A_{n2}}{(x - a_n)^{k_n-1}} + \dots + \frac{A_{nn}}{x - a_n}$$

$$+ \frac{B_{11}x + D_{11}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1}} + \frac{B_{12}x + D_{12}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1-1}} + \dots + \frac{B_{1n}x + D_{1n}}{x^2 + b_1 x + c_1} + \dots + \frac{B_{n1}x + D_{n1}}{(x^2 + b_n x + c_n)^{l_n}} + \dots + \frac{B_{nn}x + D_{nn}}{x^2 + b_n x + c_n}$$

Exemple: Décomposé en éléments simples dans $\mathbb{K}[x]$, la fraction rationnelle suivante:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x-1)(x+2)^3(x^2+1)(x^2-x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x+2)^3} + \frac{A_{13}}{(x+2)^2} + \frac{A_{14}}{(x+2)} + \frac{B_1x + D_1}{x^2+1} + \frac{B_2x + D_2}{(x^2-x+1)^2} + \frac{B_3x + D_3}{x^2-x+1}$$

par identification, introduire les valeurs A_{1j} ($1 \leq j \leq 4$)
 B_i ($1 \leq i \leq 3$) et D_i ($1 \leq i \leq 3$).

Techniques usuelles de calculs des coefficients

a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}

- * Identification
- * Multiplication par $(x-a)^p$ et choix de la valeur particulière $x=a$.
- * Calculs des limites en $+\infty$ ou $-\infty$.
- * Diviseur euclidienne.