

Chapitre 03

Fonctions réelles d'une variable réelle

3.1 Fonction réelle

Définition 3.1: On appelle fonction réelle (fonction numérique d'une variable réelle) toute application de E dans $\mathbb{R}$. On notera:

$$f: E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

tel que E est une partie de $\mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$)

- * L'ensemble E s'appelle domaine ou l'ensemble de définition de f . On notera $E = D(f)$ ou $E = D_f$.
- * L'ensemble $\mathbb{R}$ s'appelle l'ensemble d'arrivée, et le sous ensemble $f(E) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in E: y = f(x)\}$ s'appelle l'image de f .
- * y est appelé image de x par f et x est appelé antécédent de y par f .

Définition 3.2: Le graphe $\text{Gr}(f)$ d'une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$\text{Gr}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

Exemple 3.1:

$$\text{soit } f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} \\ &= \mathbb{R} - \{+1\} \end{aligned}$$

Définition 3.3: Soit f une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
On suppose que $\forall x \in D, (-x) \in D$.

1. On dit que f est une fonction paire si:

$$\forall x \in D: f(x) = f(-x).$$

Le graphe de la fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (y).

2. On dit que f est une fonction impaire si:

$$\forall x \in D: f(x) = -f(-x).$$

Le graphe de la fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine $O(0,0)$.

Exemple 3.2:

1. Soit $f(x) = x^2$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}: f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

donc, f est paire.

2. Soit $f(x) = \sin x$.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}: f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

donc, f est impaire.

Définition 3.4: Soit f une fonction ($f: E \rightarrow \mathbb{R}$)

On dit que la fonction f est périodique s'il existe $T > 0$ tel que:

$$\forall x \in E, x+T \in E: f(x+T) = f(x).$$

donc f est dite périodique et période T .

Exemple 3.3:

soit $f(x) = \sin x$, est une fonction périodique de période 2π car $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Définition 3.5: soit $f: D \rightarrow F$ une fonction

1. On dit que f est **croissante** (resp strictement croissante) si: $\forall x, y \in D; x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp $f(x) < f(y)$)
2. On dit que f est **décroissante** (resp strictement décroissante) si: $\forall x, y \in D; x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (resp $f(x) > f(y)$)
3. On dit que f est **monotone** sur D , si elle est croissante ou elle est décroissante sur D .

Définition 3.6: Une fonction f définie de D dans $\mathbb{R}$ est dite **bornée** s'il existe un réel m tel que $|f(x)| \leq m, \forall x \in D$.

Exemple 3.4: $f(x) = \sin x$ est bornée car: $\forall x \in \mathbb{R}: |\sin x| \leq 1$

Définition 3.7: soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet une limite au point x_0 .

(On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$) cette limite est unique.

- * La limite à droite est notée $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l$
- * La limite à gauche est notée $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = l$.

Proposition 3.1: Si $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Les formes indéterminées sont $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $-\infty + \infty$.

Exemple 3.5: soit: $f(x) = \frac{x^2+1}{|x-1|}$

On a:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x^2+1}{x-1} = -\frac{2}{0^-} = +\infty$$

2. $f(x) = \frac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x+a}{x^2+ax+a^2} \\ &= \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a} \end{aligned}$$

3.2 Fonctions Continues:

Définition 3.8: Soit f une fonction réelle: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
(I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$).

1. On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. On dit que f est continue à droite en x_0 si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

3. On dit que f est continue à gauche en x_0 si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Remarque 3.1:

* La Continuité de f à droite et à gauche en x_0 entraîne la Continuité de f en x_0 .

* La fonction f est Continue sur I si elle est Continue en tout point de I .

Notation 3.1: L'ensemble des fonctions Continues sur I se note $C(I)$.

Exemple 3.6:

1. Soit $f(x) = |x|$, $D_f = \mathbb{R}$. $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$$

donc f est Continue en $x_0 = 0$.

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 2$$

donc f est une fonction discontinue en $x_0 = 0$.

Proposition 3.2: (Opérations sur les fonctions Continues)
Si f et g sont définies sur un même intervalle I et Continues au point x_0 de I alors:

Les fonctions $\alpha \cdot f$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $f + g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$), et $|f|$ sont Continues au point x_0 .

Théorème 3.1: (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires ($f(a) \times f(b) < 0$), alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple 3.7:

Considérons l'équation $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[0, 1]$
 f est continue sur $[0, 1]$ car c'est une fonction polynôme
 $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$
 $f(0) \times f(1) < 0$.

donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins un point $c \in]0, 1[$.

Théorème 3.2: (prolongement par continuité)
Soit $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ existe et est finie alors f est prolongeable par continuité en x_0 .
la fonction $\hat{f}$ définie par:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I - \{x_0\} \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 .

Exemple 3.8:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
On peut lui associer la fonction $\hat{f}$ continue sur $\mathbb{R}$, en posant

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est déduit que f est prolongeable par continuité au point 0.

3.3 Fonctions dérivable:

Définition 3.9: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique.

On dit que f est dérivable au point x_0 si la limite (finie)
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. Cette limite est alors

unique est appelée dérivée de f au point x_0 et notée $f'(x_0)$.

On utilise parfois les notations suivantes pour désigner la dérivée de f en x_0 .

$$Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} \quad \text{ou } y = f(x).$$

Exemple 3.9:

* Si f est constante, on a $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

* La dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Ce qui donne $f'(x) = \frac{1}{2}$.

Remarque 3.2:

* Si le rapport $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite (finie) à droite (resp. à gauche) au point x_0 , cette limite est appelée dérivée à droite (resp. à gauche) de f au point x_0 et notée $f'(x_0 + 0)$ (resp. $f'(x_0 - 0)$).

* Pour f soit dérivable en x_0 il faut, et il suffit que $f'(x_0 + 0)$ et $f'(x_0 - 0)$ existent et que $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$.

On a alors: $f'(x_0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$.

Exemple 3.3:

La fonction $f: x \rightarrow |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ a au point $x_0 = 0$ en effet:

Si $x > 0$, $f(x) = x$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

Si $x < 0$, $f(x) = -x$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$

donc, f n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$.

Proposition 3.3: (Dérivabilité et Continuité).

Si une fonction est dérivable en un point elle est continue en ce point.

Remarque 3.3:

La réciproque de cette proposition est fausse par exemple la fonction $x \rightarrow |x|$ est continue en 0

mais n'est pas dérivable en ce point

Théorème 3.3 (de Rolle)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ vérifiant $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins une valeur c tel que $f'(c) = 0$

Remarque 3.4:

La condition est suffisante mais pas nécessaire par exemple

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3$$

On a: $f(-1) \neq f(1)$ mais $f'(0) = 0$

Théorème 3.4: (des accroissements finis)

Soit f une fonction définie, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ tels que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, avec $a < c < b$.

Remarque 3.5:

1/ Le théorème des accroissements finis est aussi dit le théorème de Lagrange ou théorème de la moyenne.

2/ La formule $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, avec $a < c < b$.

est appelée formule des accroissements finis.

Théorème 3.5: (Règle de l'Hôpital)

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables respectivement sur $[a, b]$ et $]a, b[$.

Si pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

ou $\frac{\infty}{\infty}$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Remarque 3.6:

Si cette limite tend de nouveau vers $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on répète la règle.

Exercice:

Soient f, g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - x - 1$$

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

a. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

b. à l'aide du théorème des accroissements finis, établir la double inégalité suivante : $1-x < e^x < \frac{1}{1-x}$, $x \in]0, 1[$.

Solution:

a) f, g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^x - 1 \quad \text{et} \quad g'(x) = -x e^x$$

remarquons $f(0) = g(0)$.

b) Comme f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis

sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < x < 1$.

Appliquer le théorème à f puis à g sur $[0, x]$

$$\exists c \in]0, x[: \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(0) = x f'(c)$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 = x(e^c - 1) \Leftrightarrow e^x - 1 = x e^c$$

$$\text{Comme } c > 0, -x < x < e^x - 1 \Leftrightarrow 1 - x < e^x$$

$$\bullet \exists d \in]0, x[: \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(d)$$

$$\Leftrightarrow g(x) - g(0) = x g'(d)$$

$$\Leftrightarrow (1-x)e^x - 1 = -x d e^d$$

$$\text{Comme } 0 < d < x : (1-x)e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow (1-x)e^x < 1$$

$$\Leftrightarrow e^x < \frac{1}{1-x}$$

$$\text{on obtient alors : } 1-x < e^x < \frac{1}{1-x}, \quad x \in]0, 1[.$$

Exemple 3.4:

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$\text{on pose } f(x) = x-2, \quad g(x) = x^2-4$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$$

$$\bullet f, g \in C^1(\mathbb{R} - \{-2, 2\})$$

tel que: $g'(x) = 2x$ et $f'(x) = 1$.

* $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}: g'(x) \neq 0$

* $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x} = \boxed{\frac{1}{4}}$