TD N#02 : Simulation des Variables Aléatoires

Exercice 01

Soient les fonctions de densité de probabilité suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \frac{2x}{25} & 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Vérifiez que ces fonctions sont bien des densités de probabilité.
2. Écrivez la fonction de répartition $F(x)$ pour chaque cas.
3. Déterminez l'expression de $F^{-1}(u)$ (l'inverse de la fonction de répartition).
4. En utilisant les nombres pseudo-aléatoires : $u_1 = 0.943, u_2 = 0.398$, $u_3 = 0.372$, générez trois réalisations à l'aide de **la méthode de transformée inverse**.

Exercice 02

Soit la densité (**loi triangulaire**) :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

1. Vérifiez que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminez la fonction de répartition $F(x)$.
3. Trouvez la fonction inverse $F^{-1}(u)$.
4. Simulez manuellement trois valeurs de X pour $U = 0.25,\ 0.64,\ 0.81$ avec $a = 2, c = 5$ et $b = 10$.

Exercice 03

La demande hebdomadaire X pour un article à rotation lente (produit vendu très rarement) a été observée pendant plusieurs mois.

On a constaté que le nombre d'articles demandés par semaine peut être approximé par une **loi géométrique** définie sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots\}$, c'est-à-dire que :

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}\ ,\ \ k = 1, 2, 3, \dots$$

où p représente la probabilité d'obtenir une demande positive (un "succès") dans une semaine donnée.
La moyenne hebdomadaire observée est de 2.5 articles.
Rappel : Pour une loi géométrique sur le support $\{1, 2, 3, \dots\}$: $E(X) = (1-p)/p$

1. Déterminez la valeur du paramètre p correspondant à une moyenne hebdomadaire égale à 2.5.
2. Établissez la fonction de répartition $F(k) = P(X \leq k)$.
3. Montrez comment obtenir une réalisation de X à partir d'une variable aléatoire $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ en utilisant la méthode de transformation inverse.
4. Pour $p = 0.285$ et les valeurs pseudo-aléatoires $u_1 = 0.15, u_2 = 0.5, u_3 = 0.8$, déterminez les valeurs simulées de X.

5. Que signifie une valeur élevée de X dans ce contexte de demande ? Reliez votre réponse à la rareté des demandes et à la probabilité p.

Exercice 04

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec les probabilités :

$\boldsymbol{x}$	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{P(X = x)}$	0.10	0.25	0.30	0.20	0.15

1. Calculez la fonction de répartition $F(x)$ pour chaque valeur.
2. On tire les nombres aléatoires suivants : $u_1 = 0.08, u_2 = 0.42,\ u_3 = 0.73,\ u_4 = 0.91$. Générez quatre réalisations de X à l'aide de la méthode de transformation inverse.

Exercice 05

Soit la densité :

$$f(x) = \frac{3}{8}(4 - x^2)\,, \quad x \in [-2, 2]$$

1. Vérifiez que f est positive sur son support et que c'est bien une densité.
2. En utilisant une densité auxiliaire $g(x) = 1/4$ (uniforme sur $[-2,2]$), déterminez la constante de majoration M telle que : $f(x) \leq Mg(x) \quad \forall x\ x \in [-2, 2]$.
3. En utilisant les valeurs aléatoires tirées $(y_1\,, u_1) = (1.5{,}0.40)$, $(y_2\,, u_2) = (-1.0{,}0.55)$, $(y_3\,, u_3) = (0.5{,}0.90)$, indiquez quelles valeurs de x_i sont acceptées selon **la méthode de rejet**.
4. Quel est le taux d'acceptation?

Exercice 06

On considère une variable aléatoire X suivant une loi Gamma de paramètres $\alpha = 3$ et $\beta = 1$, dont la fonction de densité est donnée par : :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}, \quad x > 0$$

On propose d'utiliser comme densité instrumentale une loi exponentielle de paramètre 1, notée : $g(x) = e^{-x}$

1. Déterminez le taux d'acceptation théorique associée à la méthode de rejet utilisée avec cette densité auxiliaire.
2. Pour simuler $Y \sim Exp(1)$, on utilise la relation $Y =- ln(U)$ où $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Étant donné un tirage $u_1 = 0.40$, calculez la valeur correspondante y_1.
3. On tire ensuite $u_2 = 0.15$ pour le test d'acceptation. Déterminez si la valeur y_1 précédemment obtenue est acceptée ou rejetée, en vérifiant numériquement le critère.
4. Expliquez pourquoi le choix d'une loi exponentielle comme densité instrumentale $g(x)$ est naturel et efficace dans le cadre de la génération de variables Gamma.

Exercice 07

On considère deux méthodes pour simuler une loi de densité f sur [0,1] :

Méthode 1 : Instrumentale g_1 avec $M_1 = 2.5$

Méthode 2 : Instrumentale g_2 avec $M_1 = 1.8$

1. Quelle est la probabilité d'acceptation pour chaque méthode ?
2. En moyenne, combien de tirages sont nécessaires pour obtenir une valeur acceptée avec chaque méthode ?
3. Si on souhaite générer $n = 1000$ réalisations, quel est le nombre moyen total de tirages uniformes nécessaires pour chaque méthode ?
4. Laquelle des deux méthodes est préférable ? Quel critère permet de le déterminer ?
5. Peut-on avoir une méthode avec $M < 1$? Justifiez.

Exercice 08

La **loi binomiale** $Bin(n, p)$ modélise le nombre de succès dans une série de n expériences de **Bernoulli** indépendantes et identiquement distribuées (par exemple : le nombre de faces obtenues lors de n lancers d'une pièce). Pour de faibles valeurs de n, on peut la simuler directement la loi binomiale; ici, on utilise la méthode d'acceptation/rejet pour illustrer son application en contexte discret.

On considère le cas $n = 5, p = 0.4$: $X \sim Bin(5, 0.4)$ de support $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$P(X = k) = \binom{5}{k}(0.4)^k(0.6)^{5-k}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Comme loi de proposition on choisit la **loi uniforme discrète** sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$g(k) = \frac{1}{6}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

1. Calculez explicitement les valeurs de $P(X = k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Trouvez la constante M minimale telle que $P(X = k) \leq Mg(k)$ pour tout k.
3. Décrivez le procédé d'acceptation/rejet adapté à ce cas discret.
4. À partir des couples de tirages (K, U) suivants (où K est tiré uniformément sur $\{0, ..., 5\}$, et $U \sim \mathcal{U}(0,1)$) : $(K, U) = (3,0.25), (1,0.80), (4,0.10), (2,0.40)$ indiquez quels K sont acceptés.
5. Donnez une estimation du taux d'acceptation théorique attendu avec cette méthode, puis commentez brièvement son interprétation pratique.