CHAPITRE 1

ESPACE PROBABILISÉ

1.1 Théorie des probabilités

C'est une théorie mathématique qui permet la modélisation des phénomènes aléatoires, et qui étudie les lois réagissant ces phénomènes.
Un phénomène est aléatoire si on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat de sa réalisation.
C'est à dire même reproduit maintes fois, il se déroule chaque fois d'une manière différente, de sorte que le résultat de l'expérience change d'une fois à l'autre aléatoirement.

1.2 La probabilité

La probabilité est une valeur numérique associée à un évènement aléatoire qui exprime le degré de chance que cet événement se réalise.
Autrement dit, la probabilité permet de mesurer sous forme d'un nombre, l'incertitude liée à la réalisation d'un évènement donné.

Exemples :

Dans la vie courante, nous sommes souvent confrontés à des phénomènes dont l'issue n'est pas déterminée à l'avance, par exemple :

- Quel élève sera classé premier dans une épreuve donnée ?
- Y aura-t-il un accident de circulation dans une ville donnée ?

Il est clair que dans chaque cas il est impossible de donner une réponse précise, car ces phénomènes dépendent de nombreux facteurs variables et imprévisibles.
Cependant, bien qu'on ne puisse pas prévoir avec certitude le résultat de tels phénomènes, on peut constater que leurs issues possibles sont en nombre limité et bien déterminé.

1.3 Expérience aléatoire (Random experiment)

C'est toute expérience dont le résultat n'est pas prévisible, autrement dit le résultat de l'expérience ne peut pas être prédite avec certitude avant son exécution lorsque on répète l'expérience dans les mêmes conditions.
$\rightarrow$ On ne peut pas prévoir les résultats de l'expérience d'avance.
$\rightarrow$ Les résultats dépendent du hasard.

Exemples :

- Le lancer d'une pièce de monnaie.
- Le lancer d'un dé.
- Le tirage d'une carte.

1.4 Espace des événements, Events, Space

Pour une expérience aléatoire donnée, l'ensemble des résultats possibles est appelé l'espace des événements que nous noterons Ω. Chaque résultat d'expérience est un point de Ω, ou un élément de Ω.

Exemples :

• Pour le lancer d'une pièce de monnaie, $\Omega = \{P, F\}$ avec P désigne "pile" et F désigne "face".

• Pour le lancer d'un dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ω peut être fini, infini, infini dénombrable ou infini non-dénombrable.

1.5 Événements, Events

• Un évènement A est un sous-ensemble de Ω.

• L'événement {a} constitué par un seul point de Ω, donc par un seul résultat $\{a\} \in \Omega$ est appelé évènement élémentaire.

• L'ensemble vide $\emptyset$ ne contient aucun des résultats possibles est appelé événement impossible.

• L'événement Ω qui contient tous les résultats possibles est l'évènement certain.

On distingue les événements simples et les événements composés.

Exemples :

1. Jeter un dé deux fois de suite.
   $\rightarrow \Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}$.
   $A = \{(1, 2)\}$ est un événement élémentaire simple.
   $B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6)\}$ est un événement composé.
   Dans cet exemple Ω étant fini et donc dénombrable.
2. Jeter une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne pile, dans ce cas :
   $\Omega = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ est un ensemble infini dénombrable.

1.6 Opérations sur les événements

On peut combiner des évènements entre eux pour former de nouveaux évènements. Soient A et B deux événements de Ω, on a :

1. $A \cup B$: A ou B est réalisé.
2. $A \cap B$: A et B sont réalisés tous les deux.
3. A^c (ou $\overline{A}$) : A n'est pas réalisé, c'est l'événement contraire de A.

4. $A \setminus B$ (ou $A - B$) : événement caractérisé par la réalisation de A et la non-réalisation de B, on a : $A \setminus B = A \cap B^c$.
5. $A \vartriangle B$: événement caractérisé par la réalisation d'un évènement et d'un seul, réalisation de A ou de B, on a : $A \vartriangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Événements incompatibles

Si deux événements A et B ne peuvent être réalisés simultanément et on note $A \cap B = \emptyset$, on dit qu'ils sont incompatibles.

Système complet d'événements

On dit que les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une famille complète si les A_i constituent une partition de Ω, c'est à dire si :

1. Les évènements sont deux à deux disjoints :

$$\forall (i \neq j), A_i \cap A_j = \emptyset.$$

2. Ils couvrent tout l'espace : $\bigcup\limits_i A_i = \Omega$

1.7 La tribu des évènements σ-algèbre

Soit Ω un espace des évènements d'une expérience aléatoire, et soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de Ω.
On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$.
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2 \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.
4. Pour toute suite $(A_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a : $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Remarque :

• On désigne par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties possibles de Ω,

$$A \in \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow A \subset \Omega$$

. • On peut prendre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

1.8 Espace probabilisable

• Le couple (Ω, A) est appelé espace probabilisable.

• Si on définit une probabilité P sur (Ω, A), le triple (Ω, A, P) sera dit espace probabilisé.

1.9 Règles de calcul des probabilités

1.9.1 Définition d'une probabilité

Une probabilité P sur Ω est une fonction (ou application) de A dans l'intervalle $[0, 1]$.

$$P : A \rightarrow [0, 1]$$

qui vérifie les quatre axiomes suivants :

$a_1)$ $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout événement $A \in \Omega$.

$a_2)$ $P(\Omega) = 1$.

$a_3)$ $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$a_4)$ $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}; \forall i \neq j \in \mathbb{N} : A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Si Ω est un ensemble fini, il suffit de montrer les trois premieres axiomes pour que P soit une probabilité.

1.9.2 Propriétés importantes

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $\forall A \in \mathcal{A} : P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
4. $\forall A, B \in \mathcal{A} : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} : P\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Exemple :

Soient A et B deux événements tels que :

$$P(A) = \frac{3}{8}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cup B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $P(A^c)$, $P(B^c)$, $P(A \cup B)$, $P(A^c \cap B^c)$ et $P(A^c \cup B^c)$.

1.9.3 Illustration de quelques ensembles probabilisés

1.9.3.1 Ensemble probabilisé fini

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fondamental fini. On probabilise cet ensemble en attribuant à chaque point a_i un nombre p_i, probabilité de l'événement élémentaire $\{a_i\}$, tel que :

$$\begin{cases} p_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n} \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \end{cases}$$

La probabilité d'un évènement quelconque A est la somme des probabilités des a_i qu'il contient :

$$P(A) = \sum_{a_i \in A} p_i$$

Exemple :

On jette 3 pièces de monnaie et on compte le nombre de "face" obtenu, dans ce cas :

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$$

• On probabilise cet ensemble fini en donnant des valeurs p_0, p_1, p_2, p_3 aux évènements $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

• Considérons l'événement A tel qu'on ait au moins 2 fois "face" , alors $A = \{2, 3\}$, d'où

$$P(A) = p_2 + p_3$$

1.9.3.2 Ensemble fini équiprobable

C'est un ensemble fini probabilisé tel que les évènements ont la même probabilité.
On dit aussi qu'il s'agit d'un espace probabilisé uniforme.
$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et on a : $p_1 = P(\{a_1\})$, $p_2 = P(\{a_2\})$, ..., $p_n = P(\{a_n\})$,
Dans ce cas : $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$.

Définition :

On appelle probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{A})$ la probabilité P définie comme suit :

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

$$\forall A \in \mathcal{A} : P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple :

On jette un dé :

1. Déterminer l'espace des évènements Ω.
2. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit :
   $a)$ Impair.
   $b)$ Pair.
   $c)$ Premier.

Solution :

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\text{Card}(\Omega) = 6$, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$.
2. Soient les événements suivants :
   - A : "Le nombre obtenu est impair", donc $A = \{1, 3, 5\}$.
   $$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
   - B : "Le nombre obtenu est pair", donc $B = \{2, 4, 6\}$.
   $$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
   - C : "Le nombre obtenu est premier", donc $C = \{2, 3, 5\}$.
   $$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

1.9.3.3 Ensemble probabilité infini

a) Cas dénombrable :

L'espace des évènements dans ce cas est de la forme

$$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Cet ensemble est probabilisé en affectant à chaque élément a_i une probabilité (valeur réelle) p_i, telle que :

$$p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

La probabilité d'un évènement quelconque est la somme des probabilités p_i correspondant à ses éléments.

Exemple :

On jette une pièce et compte le nombre de jets jusqu'à ce qu'on obtienne un "pile", Ω dans ce cas est un espace infini dénombrable,

$$\Omega = \{1, 2, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N}^*.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = P(\{a_n\}) = P(\overline{P} \cap \overline{P} \cap \cdots \cap \overline{P} \cap P) = P(F)^{n-1} \cdot P(P) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$

1) Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n \geq 0$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1.$

Donc p est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

b) Cas d'un ensemble infini non dénombrable :

Dans ce cas, on considère que l'espace Ω possède une forme géométrique mesurable : une longueur, une surface ou un volume.

La probabilité d'un évènement A (c'est-à-dire que le point choisi appartient à A) est alors définie par le rapport de la mesure de A à celle de Ω :

$$P(A) = \frac{\text{mesure de } A}{\text{mesure de } \Omega}.$$

Ainsi :

$$P(A) = \frac{\text{longueur de } A}{\text{longueur de } \Omega} \quad \text{si la mesure est une longueur.}$$

$$P(A) = \frac{\text{surface de } A}{\text{surface de } \Omega} \quad \text{si la mesure est une surface.}$$

$$P(A) = \frac{\text{volume de } A}{\text{volume de } \Omega} \quad \text{si la mesure est un volume.}$$

Exemple :

On choisit au hasard un point à l'intérieur d'un cercle.

Trouver la probabilité que le point choisi soit plus proche du centre que du périmètre du cercle.

1.10 Probabilité conditionnelle et indépendance

1.10.1 Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et soient A et B deux événements quelconques.

On s'intéresse à ce que devient la probabilité de A lorsqu'on apprend que B est déjà réalisé.

Définition :

La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est notée $P(A \mid B)$ et est définie par la relation suivante :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple :

On jette une paire de dés bien équilibrés (espace équiprobable), on observe une réalisation de l'évènement $\{\text{somme de dés} = 6\}$.
Quelle est la probabilité pour qu'un des deux dés ait donné le résultat 2 ?
Soient :

$$B = \{(2,4),(4,2),(3,3),(1,5),(5,1)\}, \quad A = \{\text{au moins un des deux dés donne } 2\}.$$

On a :

$$A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}.$$

Donc :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{2}{5}.$$

1.10.2 Théorème de la multiplication

D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On en déduit facilement :

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B).$$

Cette équation peut se généraliser facilement selon le théorème suivant :

Théorème :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements quelconques d'un espace probabilisé tels que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0.$$

Alors on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Formule générale des probabilités

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements qui forment une partition de Ω tels que $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i = \overline{1, n}$.

Alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i).$$

1.10.3 Théorème de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de Ω.

Soit B un événement quelconque tel que $P(B) > 0$. On s'intéresse à la réalisation de l'événement A_i (pour un i fixé dans $\{1, 2, \ldots, n\}$), sachant que l'événement B est réalisé.

Autrement dit, on cherche à calculer $P(A_i \mid B)$.

Théorème :

En supposant que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une partition de Ω, alors :

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)} \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

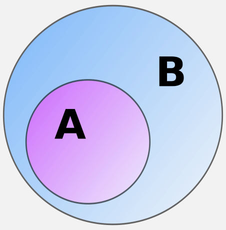
1.10.4 Indépendance entre événements

On dit que deux événements A et B sont indépendants si la réalisation de A n'est pas modifiée par le fait que B se soit produit. En termes de probabilité :

$$P(A \mid B) = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Remarques :

1. Si $A \subset B$, alors si A est réalisé, B l'est aussi.
   Donc : $P(A \cap B) = P(A)$.
   Par suite : $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1$, et $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$.
   A et B ne sont pas indépendants.



2. Si $A \cap B = \emptyset$ (événements exclusifs), alors si A est réalisé, B ne peut pas l'être.
   Donc : $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$.
   Et alors : $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$.
   De même, A et B ne sont pas indépendants.

CHAPITRE 2

VARIABLES ALÉATOIRES

Introduction

Dans un phénomène aléatoire, le résultat d'une expérience se traduit le plus souvent par une grandeur mathématique qui est représentée par un nombre réel. La notion mathématique qui représente efficacement cette situation est celle de **variable aléatoire** (v.a).

$\rightarrow$ On s'intéresse à la valeur numérique fonction du résultat d'une expérience, plutôt qu'au détail de ce résultat.

On peut se demander quel est le nombre de pannes d'un ordinateur sur une durée d'un an, sans être intéressé par les dates auxquelles ont lieu ces pannes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** sur cet espace toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que : $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow$ À chaque événement élémentaire $\omega \in \Omega$, on associe un nombre réel x associé à la v.a. X, c'est-à-dire : $\omega \longmapsto X(\omega)$

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Cette application crée un nouvel univers $X(\Omega)$ de réels.

• Si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, on dit que la v.a X est **discrète**.

• Si $X(\Omega)$ est infini, on dit que X est **continue**.

2.1 Variables aléatoires discrètes

Définition :

Une variable aléatoire X est dite **discrète** si elle est application de Ω dans un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$, le plus souvent $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$. Les valeurs de $X(\Omega)$ sont discontinues dans un intervalle donné.

$\rightarrow$ Toutes les variables qui résultent d'un dénombrement ou d'une numérotation sont de type discrètes.

Exemple :

On considère l'épreuve aléatoire suivante : « lancer de 3 pièces de monnaie », et on introduit une variable aléatoire X qui associe à chaque évènement ω le nombre de piles obtenu.
On a alors : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, \ldots\}$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

Loi de probabilité de X :

Une variable aléatoire X est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité d'obtenir ces valeurs. Cette expression s'appelle la **loi de probabilité** de X.
$\rightarrow$ La loi de probabilité d'une v.a discrète X est déterminée par les probabilités p_i des évènements $\{x = x_i\}$. Elle est donc donnée par les couples (x_i, p_i), $x_i \in X(\Omega), p_i = P(X = x_i)$.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

A condition que : $\begin{cases} p_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$

Exemple :

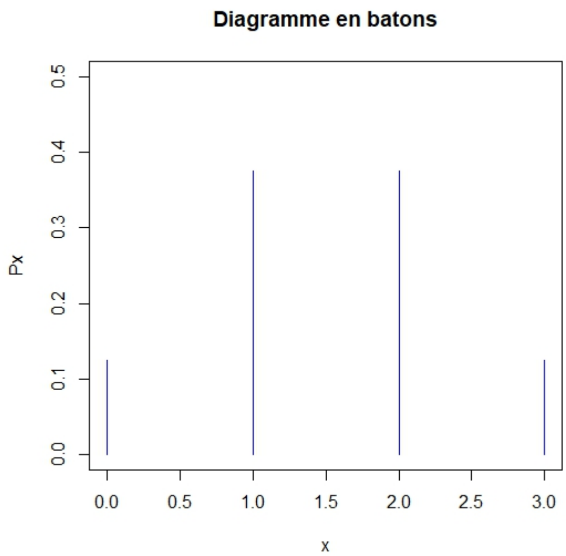
Reprenons l'exemple précédent de lancer de 3 pièces. La probabilité d'avoir *pile* égale à la probabilité d'avoir F est $\frac{1}{2}$.
La loi de probabilité du nombre de piles apparues est :

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$P(X = 0) = P(FFF) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
$P(X = 1) = P(PFP, FPF, FFP) = \frac{3}{8}$
$P(X = 2) = P(PPF, PFP, FPP) = \frac{3}{8}$
$P(X = 3) = P(PPP) = \frac{1}{8}$
On remarque que : $\forall i = \overline{0, n}, 0 \leq p_i \leq 1$
$\sum_{i=0}^{3} p_i = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$
Donc la loi donnée par les couples (x_i, p_i) est une loi de probabilité.

Représentation graphique d'une loi de probabilité :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X se représente graphiquement à l'aide d'un **diagramme en bâtons**. À chaque valeur de X est associé un bâton (un trait) dont la hauteur est proportionnelle à $P(x_i) = P(X = x_i)$. Pour l'exemple précédent, le tableau de la loi de probabilité se représente comme suit ;



Fonction de répartition

C'est un autre outil permettant de caractériser la loi d'une variable aléatoire X. La fonction de répartition est utile lorsqu'on s'intéresse à obtenir une valeur inférieure ou égale à x : $P(X \leq x)$ Son importance pratique est qu'elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle dans $\mathbb{R}$.

Définition :

On appelle **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X la fonction F_X telle que :

$$\begin{aligned} F_X :& \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \\ & x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x) \\ & \quad = \sum_{i=x_0}^{x} P(X=i) \end{aligned}$$

• Concrètement, F_X correspond à la distribution des probabilités cumulées. Le plateau atteint par F_X correspond à 1, car $\sum P_i = 1$.

• F_X est le cumul des probabilités individuelles.

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(X = x_0 \text{ ou } X = x_1 \text{ ou } \dots \text{ ou } X = x) \\ &= P(X = x_0) + P(X = x_1) + \cdots + P(X = x) \\ &= \sum_{i=x_0}^{x} P(X=i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Si X prend un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, alors :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ P(x_1) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ P(x_1) + P(x_2) & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_n - 1) & \text{si } x_{n-1} \leq x < x_n \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

Propriétés d'une fonction de répartition

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq F_X(x) \leq 1.$
2. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : si $a < b$, alors $F_X(a) < F_X(b)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ pour tout $a < b$

En effet :

(1) résulte de la définition d'une probabilité.

(2) si $a < b$, alors $\{X < a\} \subset \{X < b\}$, ainsi

$$P(X < a) \leq P(X < b) \quad \text{(inclusion).}$$

(3) même raison que (1).

(4) On a :

$$\{X < b\} = \{a \leq X \leq b\} \cup \{X < a\}$$

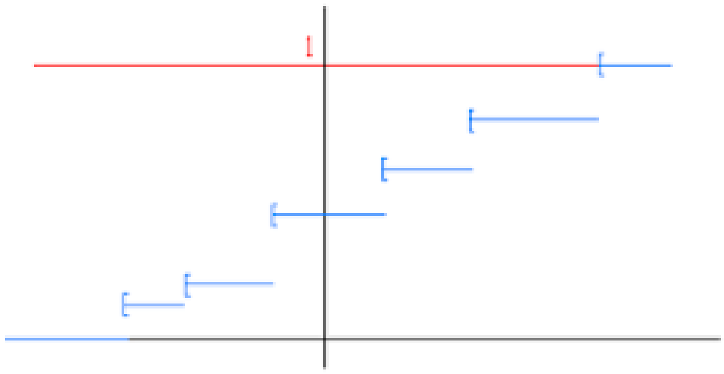
ainsi :

$$P(X \leq b) = P(a \leq X \leq b) + P(X \leq a)$$

$$\Rightarrow P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Représentation graphique de F_X :

La fonction de répartition est une fonction en escalier. Ses valeurs sont constantes sur les intervalles $[x_{i-1}, x_i[$ et elle aura un saut de taille $P(x_i)$ en x_i, pour $i = 1, 2, \ldots$



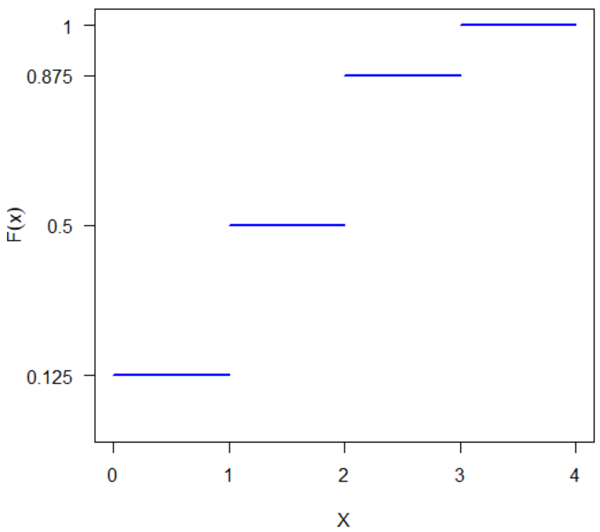
Exemple :

On continue avec le même exemple précédent où la variable aléatoire X désigne le nombre de piles obtenues dans un lancer de pièce 3 fois de suite. On a vu que la loi de probabilité de X est :

x	0	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

D'où :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq X < 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} & \text{si } 1 \leq X < 2 \\ \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq X < 3 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1 & \text{si } X \geq 3 \end{cases}$$



Calculons les probabilités suivantes :

$P(X \leq 2) = \frac{7}{8}$, car $2 \in [2, 3[$ donc $P(X \leq 2) = F_X(2)$

$P(X < 2.5) = \frac{7}{8}$, car $2.5 \in [2, 3[$ donc $P(X < 2.5) = F_X(2.5)$

$P(1.5 < X < 2.5) = P(X \leq 2.5) - P(X \leq 1.5) = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$

Sinon, on a :

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X < 2.5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X < 1.5) = P(X = 0) + P(X = 1)$

Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète

– L'espérance (ou moyenne) d'une variable aléatoire discrète X est définie comme suit :

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i\, P(X = x_i) = \sum_{x_i} x_i\, p_i$$

– La variance de X est donnée par :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

où $E(X^2) = \sum_{x_i} x_i^2\, P(X = x_i) - [E(X)]^2)$, le moment d'ordre 2.

– Son écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent.

• $E(X) = \sum_{x_i} x_i \, P(X = x_i) = (0 \times \frac{1}{8}) + (1 \times \frac{3}{8}) + (2 \times \frac{3}{8}) + (3 \times \frac{1}{8}) = \frac{12}{8} = 1.5.$

• $E(X^2) = \sum_{x_i} x_i^2 \, P(X = x_i) = (0) + (1^2 \times \frac{3}{8}) + (2^2 \times \frac{3}{8}) + (3^2 \times \frac{1}{8}) = \frac{3+12+9}{8} = \frac{24}{8} = 3.$

• $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - (1.5)^2 = 3 - 2{,}25 = 0.75.$

• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.75} \approx 0.86.$

2.2 Variables aléatoires continues

Définition :

Une variable aléatoire X est dite **continue** si l'ensemble de ses valeurs est un intervalle ou une réunion d'intervalles. En général, toutes les variables qui résultent d'une mesure sont de type continu.

$$X(\Omega) = [a, b]$$

Exemples :

- Le taux de glucose dans le sang.
- La masse corporelle des individus pour une espèce animale donnée.
- La hauteur exacte de plantes en mm, etc.

Remarque :

• Dans le cas d'une v.a. continue, la probabilité associée à l'événement $\{X = a\}$ est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.

• On considère alors la probabilité que X prenne des valeurs dans un intervalle $[a, b]$, telle que : $P(a \leq X \leq b), P(X < b) \ldots$ etc

Fonction densité de probabilité

Soit X une variable aléatoire continue. On appelle **densité de probabilité** toute application continue f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

et qui satisfait les deux conditions suivantes :

1. $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire continue ayant une densité de probabilité f. La fonction de répartition F de X est définie par :

$$\begin{aligned} F_X : &\mathbb{R} \to [0,1] \\ x &\mapsto F_X(x) = P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \end{aligned}$$

et qui possède les propriétés suivantes :

1. F_X est continue et croissante, Si $a \leq b$, alors $F_X(a) \leq F_X(b)$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Réciproquement

Une variable aléatoire X définie sur Ω est dite **absolument continue** s'il existe une fonction densité de probabilité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = F(x)$$

Propriétés :

1. Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx &= P(x_1 \leq X \leq x_2)\\ &= F(x_2) - F(x_1)\\ &= \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx\end{aligned}$$

2. La densité de probabilité est la dérivée de la fonction de répartition F. On écrit :

$$f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Espérance mathématique et variance

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f.

• L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$$

• La variance de X est :

$$\begin{aligned}V(X) &= E\Big[(X - E(X))^2\Big]\\ &= E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

avec $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx$

Remarque :

La variance est toujours positive $V(X) \geq 0$.

Propriétés :

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX) = a\,E(X)$
- $E(a) = a$
- $V(aX) = a^2\,V(X)$
- $V(aX+b) = a^2\,V(X)$, car $V(b) = 0$
- Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes ($\text{Cov}(X,Y) = 0$), alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire de fonction densité de probabilité donnée par :

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

1. La fonction de répartition

On a par définition :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt \\ &= -\int_{0}^{x} -e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Espérance mathématique

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx$

On intègre par parties :

On pose : $u = x \quad \Rightarrow \quad u' = 1, \quad v' = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad E(X) &= uv - \int_0^{+\infty} u'v \\ &= \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \\ &= \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. La variance

On a : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Calculons $E(X^2)$:

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx = 2$ (intégration par parties).

D'où

$$V(X) = 2 - 1^2 = 1$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = 1$$