

## Série de TD N°2

2025-2026

---

### Exercice 1 :

Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $B$  un sous-ensemble de  $E'$ . On suppose que, pour tout  $x \in E$  l'ensemble  $B_x = \bigcup_{f \in B} \{\langle f, x \rangle\}$  est borné (dans  $\mathbb{K}$ ).

Montrer que  $B$  est borné.

### Exercice 2.

Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres strictement positifs telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ .

Soit  $(f_n)_{n \geq 1} \subset E'$  une suite qui vérifie la propriété suivante

$$\begin{cases} \exists r > 0, \forall x \in E \text{ avec } \|x\|_E < r, \exists C(x) \in \mathbb{R}; \\ \langle f_n, x \rangle \leq \varepsilon_n \|f_n\|_{E'} + C(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $g_n = \frac{1}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|_{E'}} f_n$ . Montrer que  $(g_n)$  est bornée.
2. Montrer que  $(f_n)$  est bornée.

### Exercice 3 :

Soit  $F = \ell^2(\mathbb{R}) = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}; \sum_{i \in \mathbb{N}^*} x_i^2 < \infty\}$  muni de la norme  $\|\cdot\|_2$  définie par

$$\|x\|_{\ell^2} = \left( \sum_{i \in \mathbb{N}^*} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit  $E = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2(\mathbb{R}); x_i = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } i\}$  un sous espace vectoriel de  $F$ .

On note  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  un élément arbitraire de  $F$ . Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n : E \rightarrow F$  définie par :  $T_n x = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  où

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ nx_n & \text{si } i = n. \end{cases}$$

On note  $A = \{T_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ ,  $A_x = \{T_n x; T_n \in A\}$ .

– Montrer que pour chaque  $x \in E$ ,  $A_x$  est borné dans  $F$ , mais que  $A$  n'est pas borné dans  $\mathcal{L}(E, F)$ .

– Expliquer pourquoi le théorème de Banach-Steinhaus ne s'applique pas.

### Exercice 4.

Soit  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|$  telle que  $(E, \|\cdot\|)$  soit complet et

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0 \Rightarrow (f_n)_n \text{ converge simplement vers } f.$$

Soit  $\|\cdot\|_\infty$  la norme de la convergence uniforme sur  $E$ .

Pour  $t \in [0, 1]$  et  $f \in E$ , on pose  $L_t(f) = f(t)$ .

1. Montrer que  $L_t$  est une forme linéaire continue sur  $E$ .
2. En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|, \quad \forall f \in E.$$

3. Dédurre les deux normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|$  sont équivalentes.

**Exercice 5.**

Soit  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ . On considère les deux espaces normes  $X = (E, \|\cdot\|_\infty)$  et  $Y = (E, \|\cdot\|_1)$ . On désigne par  $I$  l'application identité de  $X$  dans  $Y$ .

1. Montrer que  $I$  est bijective, continue. Quelle est sa norme ?
2. Montrer que  $I^{-1}$  n'est pas continue (on pourra utiliser la suite  $f_n(t) = t^n$ ).
3. En déduire que  $Y$  n'est pas complet.

**Exercice 6.**

Soit  $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$  et  $F = C([0, 1], \mathbb{R})$ , tous deux munis de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Soit  $T : E \rightarrow F$  défini par  $\forall f \in E, Tf = f'$ .

1. Montrer que  $G(T)$  est fermé dans  $E \times F$ .
2. Montrer que  $T$  n'est pas continue (on pourra utiliser la suite  $(f_n) \subset E, f_n(t) = t^n$ ).
3. Expliquer le résultat.

**Exercice 7.**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  un opérateur linéaire.

On suppose pour tout  $f \in F'$ , la forme linéaire  $f \circ T : E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue. En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer que  $T$  est continu.

**Exercice 8 :**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé.

- 1) Soit  $x \in E$  tel que  $f(x) = 0$ , pour tout  $f \in E'$ . Montrer que  $x = 0$ .
- 2) Montrer que le dual de  $E'$  sépare les points de  $E$ , i.e., pour tous  $x, y \in E, x \neq y$ , il existe  $f \in E'$  telle que  $\langle f, x \rangle \neq \langle f, y \rangle$ .

**Exercice 9 :**

Montrer qu'il existe une forme linéaire  $f$  sur l'ensemble des suites réelles bornées  $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$  telle que pour toute suite  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on ait

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq f(a) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$