Corrigé Travaux dirigés N°1

Exercice 01

1. Résoudre l'équation différentielle **(E')** : $9y''(x) - y(x) = 0$

C'est l'équation différentielle du 2^{nd} ordre homogène associée à (E) : **a = 9 ; b = 0 ; c = -1**

Equation caractéristique : $9r^2 - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 > 0$

Donc on a deux solutions réelles : $\mathbf{r_1 = -1/3}$ **et** $\mathbf{r_2 = 1/3}$

Donc les solutions de **(E')** sont définies sur IR par : $\mathbf{y(t) = \lambda e^{t/3} + \mu e^{-t/3}}$ avec λ et μ deux **constantes réelles.**

2. Si h est constante alors $h(x) = A$ donc $h'(x) = h''(x) = 0$. On remplace h dans l'équation (E) car elle est solution particulière de (E). D'où : $9h''(x) - h(x) = 4 \Longrightarrow 9 \times 0 - A = 4 \Longrightarrow -A = 4$ donc $A = -4$

Donc la fonction constante solution de l'équation différentielle **(E)** est $\mathbf{h(x)} = A = \mathbf{-4}$

3. on en déduit que les solutions de l'équation différentielle **(E)** sont de la forme :
$\mathbf{y(t) = \lambda e^{t/3} + \mu e^{-t/3} - 4}$ avec λ et μ deux constantes réelles.

4. Si $y(0) = 0$ alors $\boldsymbol{\lambda + \mu = 4}$ et si $y'(0) = 0$ $\mathbf{y'(t) = (\lambda/3)e^{t/3} - (\mu/3)e^{-t/3}}$ alors $\mathbf{(\lambda/3) - (\mu/3) = 0}$.

D´ou : $\boldsymbol{\lambda + \mu = 4}$ **et** $\boldsymbol{\lambda - \mu = 0 \Rightarrow \mu = \lambda = 2}$

Donc la solution est : $\mathbf{y(t) = 2e^{t/3} + 2e^{-t/3} - 4}$

Exercice 02

1/ Recherche des solutions de $y''(t) + 2y'(t) = 0$
C'est l'équation différentielle sans second membre associée à (E) avec **a = 1 ; b = 2 ; c = 0.**
Equation caractéristique : $r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r(r + 2) = 0$ donc $r = 0$ ou $r = -2$
Donc les solutions de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(t) = \lambda e^{0t} + \mu e^{-2t} = \lambda + \mu e^{-2t}$ avec λ et μ 2 **constantes réelles.**

2/ Si $f(t) = At\,e^{t}$ soit une solution particulière de (E) alors f doit vérifier $f''(t) + 2f'(t) = (4 + 3t)e^t$
On a donc besoin de :

- $\mathbf{f'(t) = Ae^t + Ate^t}$ (attention f est mise sous la forme d'un produit ! revoir la dérivée d'un produit !!)
- $\mathbf{f''(t)} = Ae^t + Ae^t + Ate^t = \mathbf{2\,Ae^t + Ate^t}$

Donc $f''(t) + 2f'(t) = 2\,Ae^t + Ate^t + 2(Ae^t + Ate^t) = 4\,Ae^t + 3Ate^t = A(4 + 3t)e^t = (4 + 3t)e^t$
Donc par identification $A = 1$

D'où la solution particulière sera : $\mathbf{f(t)} = At\,e^{t} = \mathbf{t\,e^{t}}$

3/ Donc les solutions générales de (E), avec la question 1 et 2, sont de la forme : $\mathbf{y(t) = \lambda + \mu e^{-2t} + t\,e^{t}}$

Exercice 03

1. Résoudre l'équation différentielle (E0) : $x''(t) + 4x(t) = 0$. C'est l'équation différentielle sans second membre associée à (E) **avec a = 1 ; b = 0 ; c = 4**:

Equation caractéristique : $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = -16 < 0$

Donc on a deux solutions complexes conjuguées : $\mathbf{r_1 = 2i}$ **et** $\mathbf{r_2 = -2i}$

Pour r_1 : la partie réelle est : $\alpha = 0$ et la partie imaginaire est : $\beta = 2$

Donc les solutions de (E') sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x(t) = e^{0t}(\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)) = \boldsymbol{\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)}$ avec λ et μ deux **constantes réelles.**

2. Si $g(t) = A\cos t + B\sin t$ est solution de (E) alors g vérifie l'équation différentielle : $g''(t) + 4g(t) = -6\sin(t)$

On a alors besoin de calculer :

- $g'(t) = -A\sin t + B\cos t$
- $g''(t) = -A\cos t - B\sin t$

Donc $g''(t) + 4g(t) = -A\cos t - B\sin t + 4(A\cos t + B\sin t) = -6\sin(t) \Leftrightarrow 3A\cos t + 3B\sin t = -6\sin t$

$\Rightarrow$ Par identification : $\begin{cases} 3A = 0 \\ 3B = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \end{cases}$ donc $g(t) = A\cos t + B\sin t = -2\sin(t)$

3. Avec la question 1 et 2, on en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :

$\boldsymbol{x(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) - 2\sin(t)}$ où λ et μ sont des **constantes réelles quelconques.**

4. On cherche la solution de (E) donc d'après la question 3 : $\boldsymbol{x(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) - 2\sin(t)}$

Or $x(0) = -1 \Rightarrow x(0) = \lambda\cos(0) + \mu\sin(0) - 2\sin(0) = -1 \Rightarrow \lambda = -1$ car $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$

Pour $x'(0) = 1$, on a besoin de calculer $x'(t)$:

$x'(t) = -2\lambda\sin(2t) + 2\mu\cos(2t) - 2\cos(t) \Rightarrow x'(0) = -2\lambda\sin(0) + 2\mu\cos(0) - 2\cos(0) = 0 \Rightarrow 2\mu - 2 = 0 \Rightarrow \mu = 1$

Donc la solution particulière de l'équation différentielle (E) est :

$$x(t) = \boldsymbol{\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) - 2\sin(t)} = -\cos(2t) + \sin(2t) - 2\sin(t)$$

$\cos(2t) + \sin(2t) - 2\sin(t)$

hafsaoui@univ-jijel.dz