# Corrigé Travaux dirigés N°4

## Exercice 01

**1.** Le Lagrangien du système :

$$x_1 = \frac{l}{4}\theta \quad x_2 = \frac{3l}{4}\theta$$

L'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{l}{4}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{3l}{4}\dot{\theta}\right)^2$

L'énergie potentielle : $E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{4}\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{4}\theta\right)^2 = k\left(\frac{l}{4}\theta\right)^2$

Le Lagrangien : $L = \frac{l^2}{32}\dot{\theta}^2(m+9M) - k\frac{l^2}{16}\theta^2$

**2.**

**a)** L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{l^2}{16}(m+9M)\dot{\theta}\right) - \left(-\frac{l^2}{8}k\theta\right) = 0$$

$$\frac{l^2}{16}(m+9M)\ddot{\theta} + \left(\frac{l^2}{8}k\theta\right) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{m+9M}\right)\theta = 0$$

**b)** La pulsation propre :

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m+9M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m+9M}} = \sqrt{\frac{2X20}{1+9}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2\ rad/s$$

**c)** La période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m+9M}}} = \frac{2\pi}{2} = 3,14\ s$

**3.** La solution générale :

$$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \ \Rightarrow\ \theta(t) = A\sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{\theta}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t) \ \ \dot{\theta}(0) = \omega \ \ \Rightarrow A = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\theta(t) = \frac{\omega}{\omega_0}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m+9M}}\ t\right)$$

$$\theta(t) = 5\sin(\ 2\ t)$$

## Exercice 02

**1.** L'équation du mouvement :

- L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}K(a\theta)^2 + \frac{1}{2}K(r\theta)^2 = \frac{1}{2}K(r^2+a^2)\theta^2$$

- La fonction de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{X}^2 = \frac{1}{2}\alpha\left(r\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha r^2\dot{\theta}^2$

- Le Lagrangien : $L = E_c - E_p = \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K(r^2+a^2)\theta^2$

- L'équation de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = 0$

- L'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{2K(r^2+a^2)}{mr^2}\theta = 0$$

**2.** La pulsation propre $\omega_0$ **,** la **pseudo période** et le coefficient d'amortissement $\delta$ :

L'équation differentielle est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + {\omega_0}^2\,\theta = 0$

Par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2K(r^2+a^2)}{mr^2}}$$

$$2\delta = \frac{2\alpha}{m} \implies \delta = \frac{\alpha}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left[\frac{2K(r^2+a^2)}{mr^2}\right]-\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}}$$

**3.** La **forme** de la **solution** dans les **trois cas** d'amortissement :

- $\delta > \omega_0$ **: Système fortement amorti :** $\theta(t) = e^{-\delta t}\left[Ae^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,t} + Be^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,t}\right]$
- $\delta = \omega_0$ **: Système en amortissement critique :** $\theta(t) = e^{-\delta t}\,(A+Bt)$
- $\delta < \omega_0$ **: Système faiblement amorti :** $\theta(t) = A\,e^{-\delta t}\,\cos(\omega_A t + \varphi)$