

corrigé Travaux dirigés N°5

Exercice 01

$$N = 3 \text{ (} x, X, \theta \text{)} \quad r = 2 \text{ (} x = R\theta \quad X = 2R\theta \text{)} \quad ddl = N - R = 3 - 2 = 1$$

- L'énergie cinétique :

$$E_c = E_{c\text{disque}} + E_{c2m} + E_{cm} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(2m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{X}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M(2R)^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(2m)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(2R)^2\dot{\theta}^2 \quad E_c = (M + 3m)R^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle : $E_p = E_{pK} + E_{p2m} + E_{pm} = \frac{1}{2}KX^2 + 2mgx - mgX$

$$E_p = \frac{1}{2}K(2R\theta)^2 = 2KR^2\theta^2$$

- La fonction de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{X}^2 = \frac{1}{2}\alpha(2R\dot{\theta})^2 = 2\alpha R^2\dot{\theta}^2$
- Le Lagrangien : $L = E_c - E_p = (M + 3m)R^2\dot{\theta}^2 - 2KR^2\theta^2$
- L'équation de Lagrange : Le système est libre amorti

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

1. L'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{(M+3m)}\dot{\theta} + \frac{2K}{(M+3m)}\theta = 0$$

2. La pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement δ :

$$\text{L'équation différentielle est de la forme : } \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{(M+3m)}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{(1+3 \cdot 0,5)}} = 1,265 \text{ rd/s}$$

$$2\delta = \frac{2\alpha}{(M+3m)} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{(M+3m)} = \frac{8}{(1+3 \cdot 0,5)} = 3,2 \text{ s}^{-1}$$

3. La nature de mouvement :

$$\delta^2 - \omega_0^2 = (3,2)^2 - (1,265)^2 = 8,64 > 0 \quad \text{L'Amortissement est fort} \Rightarrow$$

Le mouvement est aperiodique

4. Pour avoir des oscillations :

$$\delta^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \delta < \omega_0 \quad \Rightarrow \frac{\alpha}{(M+3m)} < \sqrt{\frac{2K}{(M+3m)}} \Rightarrow$$

$$\alpha < \sqrt{2K(M+3m)} \quad \alpha < \sqrt{4 \cdot 2,5} \Rightarrow \alpha < 3,16 \text{ Ns/m}$$

5. Dans ce cas : $\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{(M+3m)}\dot{\theta} + \frac{2K}{(M+3m)}\theta = F$

Exercice 02

- L'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$
- L'énergie potentielle : $E_p = 2 \left(\frac{1}{2} K x^2 \right) = K x^2$
- La fonction de dissipation : $E_D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$
- Le Lagrangien : $L = E_c - E_p = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - K x^2$
- L'équation de Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = 0$
- L'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{M} \dot{x} + \frac{2K}{M} x = 0$$

- La pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement δ :

L'équation différentielle est de la forme : $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 3,8}{0,15}} = 7,12 \text{ rd/s}$$

$$2\delta = \frac{\alpha}{M} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2M} = \frac{0,6}{2 \cdot 0,15} = 2 \text{ s}^{-1}$$

$\delta < \omega_0$: Système faiblement amorti (Régime pseudopériodique).

1. Le déplacement et la vitesse :

Dans ce cas, la solution générale est de la forme :

$$x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_A t + \varphi)$$

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{(7,12)^2 - 2^2} = 6,83 \text{ rd/s}$$

$$x(t) = A e^{-2t} \sin(6,83 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = 6,83 \cdot A e^{-2t} \cos(6,83 t + \varphi) - 2 \cdot A e^{-2t} \sin(6,83 t + \varphi)$$

A et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t) = v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = A \sin(\varphi) = 0 \\ \dot{x}(0) = 6,83.A = v_0 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = 0,58 \end{cases}$$

$$x(t) = 0,58 \cdot e^{-2t} \sin(6,83 t) \quad [cm]$$

$$x(t) = 58 \cdot 10^{-4} e^{-2t} \sin(6,83 t) \quad [m]$$

$$\dot{x}(t) = 4 e^{-2t} \cos(6,83 t) - 1,16 e^{-2t} \sin(6,83 t) \quad [cm/s]$$

$$\dot{x}(t) = 4 \cdot 10^{-2} e^{-2t} \cos(6,83 t) - 1,16 \cdot 10^{-2} e^{-2t} \sin(6,83 t) \quad [m/s]$$

2. Solution pour le système forcé :

- L'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{M} \dot{x} + \frac{2K}{M} x = F_0 \sin \omega t$$

- La solution homogène : $x_h(t) = A e^{-2t} \sin(6,83 t + \varphi)$
- La solution particulière : $x_p(t) = A_p \sin(\omega t + \varphi_p)$

La détermination de l'amplitude A_p et la phase initiale φ_p se fait par la méthode des nombres complexes.

$$F(t) = F_0 e^{i(\omega t)}$$

$$\underline{x_p}(t) = A_p e^{i(\omega t + \varphi_p)} = A_p e^{i\varphi_p} e^{i\omega t} = \underline{A_p} e^{i\omega t}$$

En remplaçant, on trouve :

$$A_p = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$\varphi_p = -\arctg \left[\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctg\left[\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]\right)$$

A.N :

$$x_p(t) = \frac{10}{\sqrt{(7,12^2 - 15^2)^2 + (2.2.15)^2}} \cos\left(15t - \arctg\left[\frac{2.2.15}{7,12^2 - 15^2}\right]\right)$$

$$x_p(t) = \frac{10}{\sqrt{(7,12^2 - 15^2)^2 + (2.2.15)^2}} \cos\left(15t - \arctg\left[\frac{2.2.15}{7,12^2 - 15^2}\right]\right)$$

$$x_p(t) = 5,4.10^{-2} \cos(15t + 0,33)$$

$$x_h(t) = A e^{-2t} \sin(6,83 t + \varphi)$$

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = A e^{-2t} \sin(6,83 t + \varphi) + 5,4.10^{-2} \cos(15t + 0,33)$$

$$\dot{x}_g(t) = -2A e^{-2t} \sin(6,83 t + \varphi) + 6,83A e^{-2t} \cos(6,83 t + \varphi) - 0,81. \sin(15t + 0,33)$$

$$\begin{cases} x_g(t=0) = 0 \\ \dot{x}_g(t) = 0,04 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_g(0) = A \sin(\varphi) + 5,4.10^{-2} \cos(0,33) = 0 \\ \dot{x}_g(0) = -2A \sin(\varphi) + 6,83A \cos(\varphi) - 0,81. \sin(0,33) = 0,04 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \sin(\varphi) = -0,0513 \\ A \cos(\varphi) = 0,03 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \sin(\varphi) = -0,0513 \\ A \cos(\varphi) = 0,03 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = -1,06 \\ A = 0,06 \end{cases}$$

$$x_g(t) = 0,06 e^{-2t} \sin(6,83 t - 1,06) + 5,4.10^{-2} \cos(15t + 0,33)$$