

Régulation et commande des procédés

Chapitre 1 : Analyse de la commande linéaire des systèmes continus

1- Introduction aux systèmes de commande

Dans plusieurs applications en industrie, il est important de garder à des valeurs fixes, certaines grandeurs physiques (vitesse de rotation d'un moteur, température d'un four, ...etc.) . On est donc amené à concevoir des systèmes qui commandent (ajustent) ces grandeurs physiques jusqu'à atteindre la valeur souhaitée (consigne) et la maintenir constante, quel que soient les conditions de l'environnement.

La commande des systèmes permet avant tout de réaliser des opérations répétitives et difficiles qui ne peuvent pas être confiées à l'homme, pour différents motifs. Parmi celles-ci :

- La précision : limitée dans le cas de l'intervention humaine.
- L'impossibilité d'effectuer des tâches dans certains environnements.
- La complexité : à partir d'une certaine échelle (grand nombre de paramètres), la commande manuelle n'est plus envisageable.
- La répétitivité de tâches
- La diminution des coûts et l'augmentation des rendements : en remplaçant la main d'œuvre par des robots.
- La recherche de performances élevées (productivité, coût, qualité et régularité des produits, rapidité des réponses, ...etc.)

A- Définition d'un système de commande :

Un système de commande est un assemblage de constituants physiques branchés ou reliés les uns aux autres de telle sorte qu'il puisse commander une grandeur physique sans l'intervention de l'être humain (se régler par lui-même). Un exemple de système de commande est l'appareil de chauffage (fourneau) à thermostat qui règle la température d'une pièce.

La température de référence qu'on souhaite avoir dans la pièce constitue la consigne de ce système. On la fixe généralement en réglant le thermostat de manière appropriée. La température effective de la pièce constitue la grandeur de sortie.

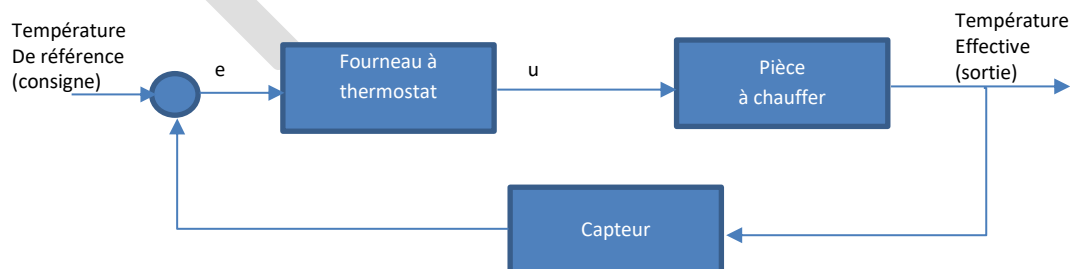


Figure 1 : Système de commande de la température d'une pièce par un fourneau à thermostat

Quand le thermostat constate que la température de référence est plus grande que la température effective de la pièce, le fourneau fournit plus de chaleur jusqu'à ce que la température de la pièce devienne égale à la température de référence. Alors, le fourneau s'éteint automatiquement.

Donc, le système de commande regroupe le fourneau qui règle la température et la pièce à chauffer comme système à régler.

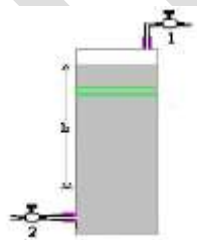
B- Classification des systèmes de commande :

Les systèmes de commande entrent dans deux classes générales :

- Les systèmes de commande en boucle ouverte
- Les systèmes de commande en boucle fermée

Exemple de commande en boucle ouverte :

L'objectif de la commande est de maintenir le niveau constant dans un réservoir, pour cela, il faut qu'à tout moment le liquide qui entre par 1 soit égale à celui qui sort par 2 ; $D_1 = D_2$.



Le niveau du liquide est appelé grandeur à commander ou bien SORTIE.

L'ouverture de la vanne 1 ou bien le débit en 1 s'appelle ENTRÉE.



• Problème de la boucle ouverte

Cette structure peut très bien fonctionner lorsque rien ne dérange le système. Mais lorsqu'une perturbation se présente (pluie, fuite), cette structure échoue.

Structure en boucle fermée

La structure en boucle fermée est envisagée pour régler en particulier le problème des **perturbations**. Ainsi, on doit ajouter deux organes principaux à la boucle ouverte pour la transformer en boucle fermée :

- Un organe de mesure qu'on appelle CAPTEUR (ex : flotteur).
- Un organe de décision qu'on appelle CONTROLEUR.

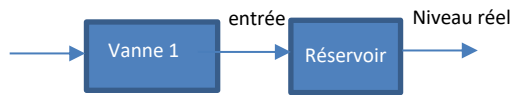


Figure 2.a Système en boucle ouverte

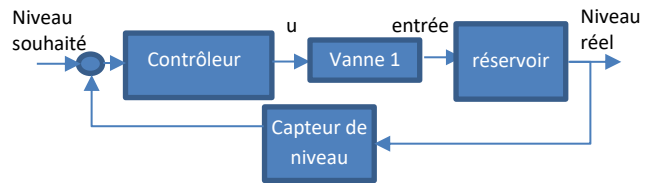


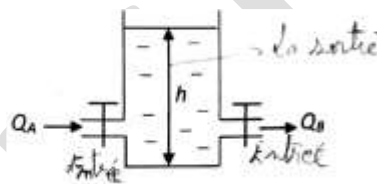
Figure 3.b Système en boucle fermée

Dans une boucle ouverte, la sortie du système commandé n'affecte pas l'entrée. Dans une boucle fermée, la sortie du système est renvoyée à l'entrée et influe le signal de commande u . C'est le retour de la sortie qui différencie un système en boucle ouverte d'un système en boucle fermée.

Exercice :

Sur un réservoir sont fixées deux conduites, par l'une se réalise l'apport d'eau avec un débit Q_A , par l'autre se réalise la prise d'eau avec un débit Q_B . On veut réguler le niveau d'eau h .

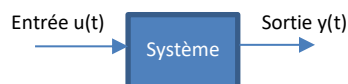
- 1/ Quelles sont les entrées et les sorties du système de commande.
- 2/ Etablir le diagramme fonctionnel du système de commande.



Pour pouvoir commander les grandeurs d'un système physique (four, réservoir, ... etc.), nous avons besoin de connaître son modèle mathématique. Le modèle mathématique du système permet l'analyse du comportement (dynamique) du système et la synthèse de la commande.

2. Modèle mathématique du système : représentation par fonction de transfert

Le modèle du système est la relation mathématique entre l'entrée et la sortie du système. On l'obtient en utilisant les lois connues de la physique, de la chimie, de l'économie, elles donnent des modèles avec des équations différentielles par rapport au temps.



Exemple : dans un réservoir, si on ouvre la vanne 1 pour remplir le réservoir de 10 litres, on remarque que le niveau augmente de 20 cm. Dans ce cas, on constate une relation entre l'entrée u et la sortie y telle que : $y = 2u$, qui représente le modèle mathématique du système.

Le modèle mathématique d'un système linéaire est donné par l'équation différentielle suivante :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

$a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_k$ sont des constantes. n est l'ordre du système. Cette équation différentielle représente le modèle mathématique du système dans le domaine temporel. Commander ce

système nécessite la résolution de cette équation différentielle. Résoudre des équations différentielles directement dans le domaine temporel peut être complexe, surtout lorsque le système est d'ordre élevé ($n > 2$). En passant au domaine fréquentiel avec la **transformée de Laplace**, ces équations différentielles se transforment en équations algébriques, beaucoup plus simples à résoudre. Ainsi, grâce à cette transformation, on peut :

- Faciliter l'analyse et la conception des systèmes de commande en boucle fermée.
- Analyser plus facilement la stabilité.
- Concevoir des contrôleurs (PID, correcteurs) via des outils comme Bode et Nyquist.
- Séparer les réponses transitoires et stationnaires.

3. Transformée de Laplace

3.1. Définition

Soit une fonction $f(t)$, la variable " t " est le temps et $f(t) = 0, t < 0$. Soit une variable complexe $p = \sigma + j\omega$, la transformée de Laplace (TL) de $f(t)$ est une fonction $F(p)$ définie par :

$$F(p) = TL[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

La fonction $F(p)$ est une fonction complexe d'une variable complexe p (avec $p = \sigma + j\omega$), σ est la partie réelle, ω est la partie imaginaire.

La fonction $f(t)$ s'appelle l'original ou l'inverse de $F(p)$, ou encore sa transformée inverse. $F(p)$ est fonction rationnelle.

$$F(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p^1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0}$$

3.2. Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace

Il est important de connaître les propriétés de la transformée de Laplace pour faciliter le calcul des transformées de Laplace de certains signaux.

Soient deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$, les TL de ces fonctions sont données par :

- $TL[f_1(t)] = F_1(p)$
- $TL[f_2(t)] = F_2(p)$

Si on considère deux constantes réelles α_1 et α_2 , les propriétés suivantes s'appliquent.

a) *Multiplication par un scalaire :*

$$TL[\alpha f(t)] = \alpha F(p)$$

b) *Linéarité ou superposition*

$$TL[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p).$$

c) *Translation temporelle (retard) :*

$$TL[f(t - \tau)] = F(p)e^{-\tau p}$$

d) *Translation temporelle (avance) :*

$$TL[f(t + \tau)] = F(p)e^{+\tau p}$$

e) *Multiplication par t :*

$$TL[t f(t)] = -\frac{dF(p)}{dp}$$

f) *Multiplication par la fonction exponentielle:*

$$TL[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

g) *Multiplication de deux fonctions temporels :*

$$TL[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(p) * F_2(p)$$

h) *Dérivation par rapport à t :*

$$TL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0). \text{ Si } f(0)=0 : TL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$$

i) *Intégration par rapport à t :*

$$TL\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

j) *Théorème de la valeur finale :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

k) *Théorème de la valeur initiale :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

Si la limite en $t = 0$ de $f(t)$ existe.

3.3. Transformée de Laplace inverse

A partir d'une fonction $F(p)$, on veut retrouver sa fonction originale $f(t)$ en utilisant la relation suivante :

$$f(t) = TL^{-1}[F(p)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{+pt} dp$$

3.4. Transformées de Laplace de quelques signaux usuels

Certaines entrées types permettent de définir les critères de performances du système. Parmi lesquelles on trouve :

a) **Echelon unité :**

L'échelon **unité** est la fonction $u(t)$ telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$U(p) = TL[u(t)] = \frac{1}{p}$$



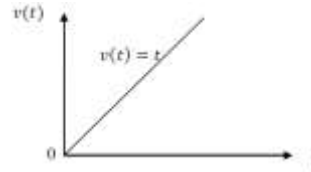
Un échelon non unitaire $f(t) = A \cdot u(t)$ d'amplitude A , aura une transformée de Laplace :

$$F(p) = TL[f(t)] = TL[A \cdot u(t)] = \frac{A}{p}$$

b) **Rampe:**

Soit la fonction rampe $v(t)$, définie par :

$$v(t) = \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

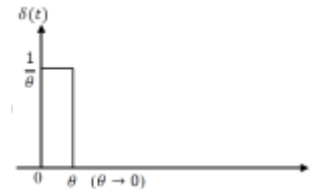


Sa TL est donnée par : $V(p) = TL[v(t)] = \frac{1}{p^2}$

c) Impulsion de Dirac :

Il s'agit d'une fonction nulle partout sauf pour $t=0$ où elle a une valeur infinie.

$$\Gamma(p) = TL[\delta(t)] = 1$$



d) Signal sinusoïdal

On considère un signal sinusoïdal $s(t)$, sa TL est donnée par les deux résultats suivants :

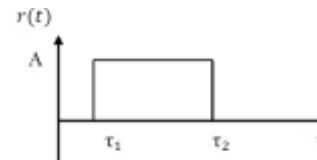
- Pour $s(t) = \sin(\omega t) \rightarrow S(p) = TL[s(t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
- Et pour $s(t) = \cos(\omega t) \rightarrow S(p) = TL[s(t)] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$

e) Signal quelconque :

Face à un signal quelconque, il est plus simple de décomposer le signal en une plusieurs signaux usuels et obtenir la TL de chaque signal usuel séparément pour à la fin appliquer le principe de la superposition.

3.5.Exemple

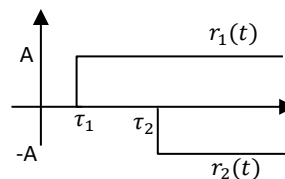
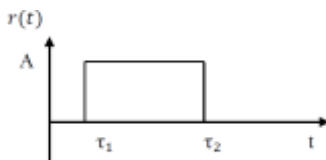
Soit $r(t)$ un signal carré donné graphiquement par la figure ci-contre :



- 1) Calculer $TL\{r(t)\}$.
- 2) Quelle est l'expression de $TL\{r(t)\}$ dans le cas où $\tau_1=0$ et $\tau_2=\tau$.
- 3) Montrer que si $A=1/\tau$ et si $\tau \rightarrow 0$, alors $TL\{r(t)\} = TL\{\delta(t)\} = 1$

Solution :

- 1) On décompose le signal en plusieurs signaux usuels :



On remarque que le signal $r(t)$ est une combinaison de deux échelons $r_1(t)$ et $r_2(t)$, d'amplitudes A et $-A$, avec un retard temporel τ_1 et τ_2 , respectivement.

Donc : $r(t) = r_1(t) + r_2(t)$

Avec : $r_1(t) = Au(t - \tau_1) = \begin{cases} A & \text{si } t \geq \tau_1 \\ 0 & \text{si } t < \tau_1 \end{cases}$

$$r_2(t) = Au(t - \tau_2) = \begin{cases} -A & \text{si } t \geq \tau_2 \\ 0 & \text{si } t < \tau_2 \end{cases}$$

$LT[Au(t)] = A \cdot \frac{1}{p}$ et $TL[f(t - \tau)] = F(p)e^{-\tau p}$, donc :

$$LT[r(t)] = LT[r_1(t)] + LT[r_2(t)]$$

$$LT[r(t)] = \frac{A}{p} e^{-\tau_1 p} - \frac{A}{p} e^{-\tau_2 p}$$

$$LT[r(t)] = \frac{A}{p} (e^{-\tau_1 p} - e^{-\tau_2 p}).$$

$$2) \text{ On a } U(p) = TL[u(t)] = \frac{1}{p}$$

Remarque : Pour transformer des fonctions qui ne sont pas nulles pour $t < 0$, on les multiplie par l'échelon unité $u(t)$.

Exemple :

$$\begin{aligned} TL[e^{-t}] &= TL[e^{-t}u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} u(t)e^{-(p+1)t}dt \\ &= 1 \cdot \int_0^{\infty} e^{-(p+1)t}dt = \frac{-1}{p+1} (e^{-(p+1)\infty} - e^{-(p+1) \cdot 0}) \\ &= \frac{-1}{p+1} (0 - 1) = \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

Donc la TL est applicable que pour les fonctions qui sont nulles pour $t < 0$.

Le tableau des fonctions usuelles contient les TL des fonctions après leur multiplication par l'échelon $u(t)$, c à d, des fonctions nulles pour $t < 0$.

3.6. Mise en équation des systèmes linéaires :

a) Définition d'un système linéaire :

Un système est linéaire s'il est décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

a_i, b_j sont des constantes.

Ce type de systèmes satisfait le principe de superposition, à savoir :

- Si $x_1(t) \rightarrow \boxed{\text{Sys}} \rightarrow y_1(t)$
- Si $x_2(t) \rightarrow \boxed{\text{Sys}} \rightarrow y_2(t)$
- Est-ce que $\left[\begin{array}{l} x(t) \rightarrow \boxed{\text{Sys}} \rightarrow ? y(t) \\ k \cdot x(t) \rightarrow \boxed{\text{Sys}} \rightarrow ? k \cdot y(t) \end{array} \right]$

Avec $x(t) = x_1(t) + x_2$ et $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$. Où, $x(t)$ est une des entrées typiques (échelon, rampe...etc.) et $y(t)$ est la sortie (réponse du système).

b) Réponse d'un système linéaire en régime transitoire et permanent :

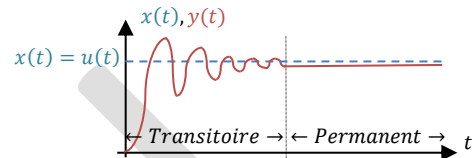
- Réponse du système linéaire en régime permanent :

Un système linéaire qui est soumis à une entrée typique, au bout d'un moment, donne une réponse qui a la même forme (de même type) que l'entrée lui en appliquée. A ce niveau, le système aurait atteint son régime permanent.

Exemple d'un système soumis à une entrée échelon :

$x(t)$: entrée échelon, $y(t)$: réponse du système .

La réponse en régime permanent est la partie de la réponse du système qui NE tend PAS vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.



Exemple : $y(t) = 3 + 2t + e^{-5t}$. Donc la réponse en régime permanent est $(3 + 2t)$.

- Réponse du système linéaire en régime transitoire :

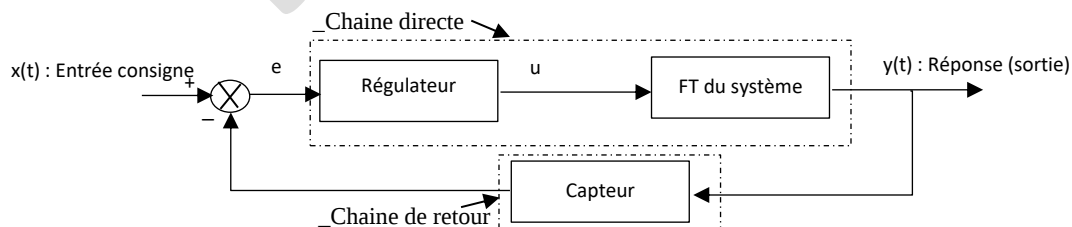
Le régime transitoire (partie oscillatoire) est le régime qui précède le régime permanent. La réponse en régime transitoire est la partie de la réponse du système qui tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

Exemple : $y(t) = 3 + 2t + e^{-5t}$. Donc la réponse en régime transitoire est e^{-5t} .

3.7. Schéma (diagramme) fonctionnel :

On représente un système de commande habituellement par un schéma appelé schéma fonctionnel ou schéma bloc. Un schéma fonctionnel comprend généralement les éléments suivants :

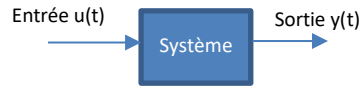
- Une chaîne directe : constituée d'un régulateur + une FT du système
- Une chaîne de retour : constituée d'un capteur.
- A l'intersection de ces deux chaînes, on trouve le comparateur qui calcule la différence entre la consigne et la mesure réelle de la grandeur à régler.
- On peut trouver aussi un sommateur 



4. Etude des systèmes linéaires du 1^{er} et du 2nd ordre : FT et Analyse du comportement dynamique

4.1. Mise en équations différentielles et notion de Fonction de Transfert (FT) :

Considérons un système linéaire possédant une entrée $u(t)$ et une sortie $y(t)$:



Ce système est décrit par une équation différentielle d'ordre n comme suit :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Avec $n, m \in \mathbb{N}, m \leq n$ et a_i, b_j sont des constantes.

Si on applique la transformée de Laplace à cette équation, **et en supposant que les conditions initiales sont nulles**, on obtient :

$$TL \left[\frac{d^n y(t)}{dt^n} \right] = p^n Y(p) \text{ et } TL \left[\frac{d^m u(t)}{dt^m} \right] = p^m U(p)$$

$$TL \left[\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right] = p^{n-1} Y(p) \text{ et } TL \left[\frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} \right] = p^{m-1} U(p)$$

$$TL \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] = p Y(p) \text{ et } TL \left[\frac{du(t)}{dt} \right] = p U(p)$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve :

$$a_n p^n Y(p) + \dots + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_m p^m U(p) + \dots + b_1 p U(p) + b_0 U(p)$$

Soit

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) Y(p) = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) U(p)$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \cdot U(p)$$

La fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe p est appelée Fonction de Transfert (TF) qu'on nomme $G(p)$, avec $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$.

Il est de même possible de factoriser $G(p)$ sous la forme suivante :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m (p - z_m)(p - z_{m-1}) \dots (p - z_0)}{a_n (p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_0)}$$

Les racines z_i qui annulent le numérateur sont appelés les **zéros** de la fonction de transfert. Les racines p_i qui annulent son dénominateur sont les **pôles** de la fonction de transfert. Ces paramètres peuvent être complexes ou réels. Le **degré** n du polynôme du dénominateur est appelé l'ordre du système.

On peut aussi écrire la FT de $G(p)$ sous sa forme canonique qui montre bien le gain statique K :

$$G(p) = K \cdot \frac{1}{p^\alpha} \frac{(1 + \tau'_1 p)(1 + \tau'_2 p) \dots (1 + \tau'_m p)}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots (1 + \tau_{n-\alpha} p)}$$

Avec τ'_i , τ_j sont des constantes du temps.

4.2. Représentation par équation différentielle d'un système du premier ordre :

Les systèmes du premier ordre se retrouvent dans de nombreux domaines sous forme de :

- Des circuits RC, qui filtrent les signaux, en électronique.
- Des systèmes amortis comme les véhicules avec suspensions, en mécanique.
- Des objets chauffés qui atteignent un équilibre thermique, en thermodynamique.

Un système est dit du 1^{er} ordre si la relation entre son entrée et sa sortie est une équation différentielle du 1^{er} ordre.

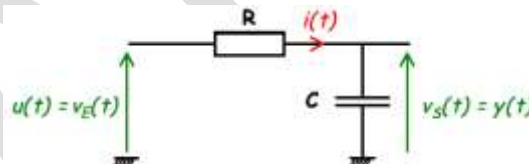
L'équation différentielle type d'un système du premier ordre est donnée par l'expression suivante :

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

où :

- $y(t)$ est la sortie du système,
- $u(t)$ est l'entrée appliquée au système,
- a_1, a_0, b_0 et b_1 sont des constantes.

Exemple : établir l'équation différentielle du circuit RC suivant :



Selon la loi des mailles de Kirchhoff : $v_E(t) = V_R(t) + v_s(t)$

Donc : $v_E(t) = Ri(t) + v_s(t)$

Avec $v_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$, donc : $i(t) = C \frac{d}{dt}(v_s(t))$.

D'où l'équation différentielle du premier ordre liant l'entrée et la sortie du système :

$$v_E(t) = R \frac{C dv_s(t)}{dt} + v_s(t)$$

Si on remplace v_s par $y(t)$ et v_E par $u(t)$, on obtient une équation différentielle d'un système du premier ordre d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est :

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

L'équation ainsi trouvée est une équation différentielle du premier ordre qui modélise un système du premier ordre électrique.

4.3. Fonction de transfert d'un système du premier ordre :

Soit l'équation différentielle suivante qui décrit un système du premier ordre ($n = 1, m = 0$):

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est obtenue en prenant le rapport entre la transformée de Laplace de sa sortie et celle de son entrée, tout en considérant les conditions initiales nulles ($y(0)=0 \dots$ etc.), Donc, en appliquant la TL sur cette équation différentielle, on obtient :

$$a_1(pY(p) - y(0)) + a_0 Y(p) = b_0 U(p)$$

Considérons les conditions initiales nulles ($y(0)=0$), l'expression précédente devient :

$$(a_1 p + a_0) Y(p) = b_0 U(p)$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{b_0}{(a_1 p + a_0)} U(p)$$

Ce qui donne :

$$Y(p) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\left(\frac{a_1}{a_0} p + 1\right)} U(p)$$

Si $\frac{b_0}{a_0} = K$ et $\frac{a_1}{a_0} = \tau$, on retrouve la forme générale de la FT d'un système du 1^{er} ordre:

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

où :

- $Y(p)$ est la TL de la sortie du système,
- $U(p)$ est la TL de l'entrée appliquée au système,
- τ est appelé constante du temps, il représente la rapidité du système.
- K est appelé gain statique du système.

L'analyse des dynamiques du système du premier ordre permet de déterminer sa réponse temporelle et fréquentielle, en fonction de sa constante du temps τ et de son gain statique K , ce qui est essentiel pour la conception et le contrôle de ces systèmes physiques. Reppelons l'exemple du circuit RC qui a comme équation différentielle :

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

Par application de la TL, on obtient :

$$RC \cdot (p \cdot Y(p) - y(0)) + Y(p) = U(p)$$

Si on considère que les conditions initiales sont nulles, c à d : $y(0)=0$, on trouve :

$$(RC \cdot p + 1)Y(p) = U(p)$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{1}{1 + RC \cdot p} U(p)$$

On en déduit l'expression de la fonction de transfert, $G(p)$:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

-avec $K = 1$ et $\tau = RC$.

4.4. Réponse indicielle d'un système du premier ordre :

L'analyse du comportement dynamique d'un système du premier ordre nécessite la détermination de sa sortie $y(t)$ dans le domaine temporel pour une entrée déterminée $u(t)$.

On examine la réponse temporelle $y(t)$ à une entrée échelon d'amplitude A_0 ($u(t) = A_0 \Gamma(t)$, on note $\Gamma(t)$ l'échelon unitaire). La réponse indicielle est calculée selon les étapes suivantes :

$$u(t) = A_0 \Gamma(t) \longrightarrow U(p) = \frac{A_0}{p} \longrightarrow Y(p) = \frac{A_0 \cdot K}{p(1 + \tau p)} \longrightarrow y(t) = K \cdot A_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\text{car : } Y(p) = G(p) \cdot U(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)} U(p) = \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K}{(1 + \tau p)}$$

on décompose $Y(p) = \frac{A_0 \cdot K / \tau}{p(\frac{1}{\tau} + p)}$ en éléments simples comme suit :

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{(\frac{1}{\tau} + p)}$$

- $A = pY(p)|_{p=0} = p \frac{A_0 \cdot K / \tau}{p(\frac{1}{\tau} + p)} \Big|_{p=0} = \frac{A_0 \cdot K / \tau}{(\frac{1}{\tau} + p)} \Big|_{p=0} = A_0 \cdot K$
- $B = (\frac{1}{\tau} + p)Y(p) \Big|_{p=-1/\tau} = (\frac{1}{\tau} + p) \frac{A_0 \cdot K / \tau}{p(\frac{1}{\tau} + p)} \Big|_{p=-1/\tau} = \frac{A_0 \cdot K / \tau}{p} \Big|_{p=-1/\tau} = -A_0 \cdot K$

Donc :

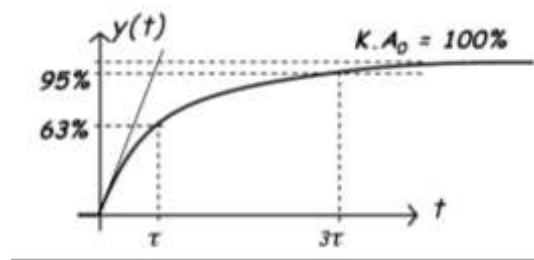
$$Y(p) = \frac{A_0 \cdot K}{p} - \frac{A_0 \cdot K}{(\frac{1}{\tau} + p)} = A_0 \cdot K \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{(p + \frac{1}{\tau})} \right]$$

Nous obtenons $y(t)$ en effectuons la TL inverse de $Y(p)$ comme suit :

$$y(t) = TL^{-1} \left[A_0 \cdot K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)} \right) \right] = A_0 \cdot K \left(u(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \right)$$

Ce qui donne : $y(t) = A_0 \cdot K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$

Cette réponse $y(t)$ montre que la sortie suit une croissance exponentielle vers la valeur finale $K \cdot A_0$ comme le montre la figure suivante :



- En régime permanent $y(\infty) = K \cdot A_0$; $K \cdot A_0$ est appelé gain statique, si $u(t)$ échelon unité, $A_0 = 1$.
- La constante de temps τ indique la rapidité de la réponse du système. Plus τ est petit, plus la réponse est rapide. Sa valeur est déterminée graphiquement pour $y(\tau) = 63\% \cdot y(\infty)$.
- Le temps de réponse de $t_{r_{5\%}} = 3\tau$, sépare le régime transitoire du régime permanent, car la réponse du système est proche de 5 % de sa valeur finale. Donc : $y(3\tau) = 95\% \cdot y(\infty)$.

Ces paramètres sont spécifiques pour les systèmes du premier ordre et de valeurs différentes d'un système à un autre.

4.5. Représentation par équation différentielle d'un système du second ordre :

Un système est dit du second ordre si la relation entre son entrée et sa sortie est une équation différentielle du 2ème ordre.

La forme générale de l'équation différentielle d'un système du second ordre d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est la suivante:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi \omega_0 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot y(t) = K \omega_0^2 \cdot u(t)$$

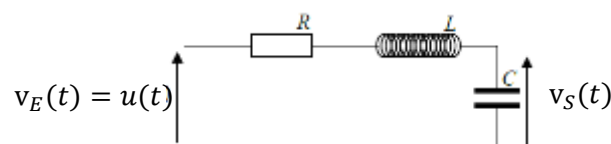
Avec :

K Gain statique,

ξ Coefficient d'amortissement,

ω_0 Pulsation propre.

Exemple : établir l'équation différentielle qui décrit le circuit RLC suivant:



Nous pouvons écrire avec le même principe que pour l'exemple précédent :

$$-v_E(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_S(t) = 0$$

Avec : $i(t) = \frac{C dv_S(t)}{dt}$

Comme précédemment, on peut obtenir une équation différentielle reliant la sortie $y(t)$ à l'entrée $u(t)$:

$$LC \frac{d^2 v_S(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_S(t)}{dt} + v_S(t) = v_E(t)$$

Si on remplace v_S par $y(t)$ et v_E par $u(t)$, on obtient une équation différentielle d'un système du second ordre d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} u(t)$$

L'équation ainsi trouvée est une équation différentielle du second ordre qui modélise un système du second ordre électrique.

4.6. Fonction de transfert d'un système du second ordre :

L'expression générale de l'équation différentielle d'un système du second ordre d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est la suivante :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi \omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = K \omega_0^2 u(t)$$

En appliquant la TL sur les deux côtés de cette équation différentielle, on obtient :

$$(p^2 Y(p) - y'(0) - y(0)) + 2\xi \omega_0 (pY(p) - y(0)) + \omega_0^2 Y(p) = K \omega_0^2 U(p)$$

Considérons les conditions initiales nulles ($y(0) = 0, y'(0) = 0$), l'expression précédente devient :

$$(p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2) Y(p) = K \omega_0^2 U(p)$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{K \omega_0^2}{(p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2)} U(p)$$

Ce qui donne :

$$Y(p) = \frac{K}{\left(\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1\right)} U(p)$$

La fonction de transfert est obtenue en prenant le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie et celle de son entrée, donc la forme générale de la FT d'un système du 2nd ordre est:

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$$

Reprenons l'exemple du circuit RLC qui a comme équation différentielle :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} u(t)$$

Par application de la TL, on obtient :

$$(p^2 Y(p) - y'(0) - y(0)) + \frac{R}{L} (pY(p) - y(0)) + \frac{1}{LC} Y(p) = \frac{1}{LC} U(p)$$

Considérant des conditions initiales nulles dans l'équation différentielle précédente :

$$\left(p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}\right) Y(p) = \frac{1}{LC} U(p)$$

D'où :

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{LC}}{\left(p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}\right)} U(p)$$

La FT d'un système de second ordre électrique est alors présentée comme suit :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

4.7. Réponse indicielle d'un système de second ordre :

La réponse indicielle à un échelon unitaire, d'un système du 2nd ordre est :

$$u(t) = \Gamma(t) \xrightarrow{\quad} U(p) = \frac{1}{p} \xrightarrow{\quad} Y(p) = \frac{K}{p \cdot \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)} = \frac{K \omega_0^2}{p \cdot (p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2)}$$

Pour trouver $y(t)$, nous avons besoin de calculer les racines du dominateur, c à d : résoudre l'équation $1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = 0$

$$\Delta = \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2} (\xi^2 - 1)$$

Trois cas possibles :

$\Delta = 0$, si $\xi = 1$: les deux pôles sont égaux et réels. Ils valent $-\omega_0$

$\Delta > 0$, si $\xi > 1$: dans ce cas les pôles sont réels : $-\xi \omega_0 \mp \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$

$\Delta < 0$, si $\xi < 1$: les deux pôles sont des complexes conjugués.

La dernière étape de détermination de $y(t)$ nécessite l'étude de trois cas en fonction de ξ :

- $\xi > 1$, régime apériodique.

Le discriminant réduit de l'équation caractéristique du dénominateur est alors

$$\Delta = (\xi^2 - 1)\omega_0^2 > 0$$

Le dénominateur possède donc deux pôles réels négatifs distincts :

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

tels que :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p \cdot (p - p_1)(p - p_2)}$$

On cherche alors à exprimer $Y(p)$ sous la forme :

$$Y(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p - p_1} + \frac{\gamma}{p - p_2}$$

afin de calculer aisément la TL inverse de $Y(p)$.

On obtient :

$$Y(p) = K \cdot \left[\frac{1}{p} + \frac{p_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{1}{p - p_2} \right]$$

D'où par TL^{-1} :

$$y(t) = K \cdot \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} \cdot e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_2 t} \right]$$

On a :

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$ (p_1 et p_2 deux pôles réels négatifs),
 $y'(0) = 0$ la tangente à l'origine est nulle.

Dans l'hypothèse où $\xi \gg 1$, la réponse du système de second ordre est similaire à celle du système du 1er ordre. A la différence d'un premier ordre le tracé de $y(t)$ (en trait plein pour $\xi \gg 1$) est caractérisé par l'absence de cassure à l'origine ($y'(0) = 0$), cependant, très rapidement, il rejoint le tracé du premier ordre (en pointillés) exprimé précédemment.

