Les axiomes de la théorie des ensembles

Attention, les notations utilisées dans cette feuille sont un peu différentes de celles utilisées dans le cours.

Les axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix (ZFC) sont :

1. l'axiome d'extensionalité :
$$\forall A\ \forall B \quad (A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Longrightarrow A = B$$
(c'est l'axiome permettant de démontrer l'égalité de deux ensembles par double inclusion)
2. l'axiome de fondation :
$$\forall A \quad A \neq \varnothing \Longrightarrow (\exists x \quad x \in A \wedge x \cap A = \varnothing)$$
3. le schéma d'axiomes de compréhension : pour toute propriété $P(x, w_0, \ldots, w_{n-1})$ pouvant être écrite dans la théorie des ensembles, on a un axiome :
$$\forall w_0\ \ldots\ \forall w_{n-1}\ \forall A\ \exists B \quad x \in B \Longleftrightarrow x \in A \wedge P(x, w_0, \ldots, w_{n-1})$$
(cela permet de fabriquer des ensembles $\{x \in A / P(x)\}$; cet axiome est en fait redondant : il peut être déduit des autres)
4. l'axiome de la paire :
$$\forall A\ \forall B\ \exists C\ \forall x \quad x \in C \Longleftrightarrow x = A \vee x = B$$
(cela permet de fabriquer un ensemble $\{A, B\}$ à partir de A et B ; cet axiome est en fait redondant : il peut être déduit des autres)
5. l'axiome de la réunion :
$$\forall A\ \exists B\ \forall x \quad x \in B \Longleftrightarrow \big(\exists y \quad y \in A \wedge x \in y\big)$$
(il permet de fabriquer la *réunion* $\bigcup_{x \in A} x$ des éléments d'un ensemble A)
6. le schéma d'axiomes de remplacement : pour toute propriété $P(x, y, A, w_0, \ldots, w_{n-1})$ qui peut être écrite dans la théorie des ensembles, on a un axiome :
$$\begin{aligned}\forall A\ \forall w_0\ \ldots\ \forall w_{n-1} \quad & \big(\forall x \quad x \in A \Longrightarrow \big(\exists! y \quad P(x, y, A, w_0, \ldots, w_{n-1})\big)\big) \Longrightarrow \\ & \big(\exists B\ \forall x \quad x \in A \Longrightarrow \big(\exists y \quad y \in B \wedge P(x, y, A, w_0, \ldots, w_{n-1})\big)\big)\end{aligned}$$
7. l'axiome de l'infini :
$$\exists A \quad \varnothing \in A \wedge (\forall x \quad x \in A \Longrightarrow x \cup \{x\} \in A)$$
(il permet en particulier de construire l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels)

8. l'axiome de l'ensemble des parties :

$$\forall A\ \exists P\ \forall x \quad x \in P \Longleftrightarrow \big(\forall y \quad y \in x \Longrightarrow y \in A\big)$$

(il permet de fabriquer l'ensemble $P = \mathscr{P}(A)$ des parties (i.e. sous-ensembles) d'un ensemble A)

9. l'axiome du choix :

$$\forall X \quad \varnothing \notin X \Longrightarrow \exists f \in \left(\bigcup_{x \in X} x\right)^{X} \quad \forall A \in X \quad f(A) \in A$$

(il y a de nombreux énoncés équivalents à cet axiome : l'axiome du bon ordre (ou théorème de Zermelo : tout ensemble peut être muni d'un bon ordre, c'est-à-dire une relation d'ordre telle que toute partie non vide ait un plus petit élément), le lemme de Zorn (tout ensemble inductif a un élément maximal), etc ; cet axiome est connu pour permettre de prouver plusieurs résultats surprenants pour l'intuition, comme le paradoxe de Banach-Tarski).