

المحاضرة 6: مقاييس النزعة المركزية

في عالم الإحصاء، تُعد مقاييس النزعة المركزية من الأدوات الأساسية لفهم طبيعة البيانات وتلخيصها. فهي تسمح لنا بتحديد القيمة التي "تميل" إليها البيانات، وتوفر نظرة أولية حول موقع التوزيع الإحصائي. سواء كنا ندرس أجور الموظفين أو درجات الطلبة أو نتائج استطلاع رأي، فإن هذه المقاييس تمنحنا مدخلاً أولياً لفهم الظاهرة المدروسة.

تشمل مقاييس النزعة المركزية ثلاثة مؤشرات رئيسية: المتوسط الحسابي، الذي يمثل مجموع القيم مقسوماً على عددها؛ الوسيط، الذي يحدد القيمة الوسطى في الترتيب؛ والمتوال، الذي يشير إلى القيمة الأكثر تكراراً. كل مقياس منها يعكس زاوية مختلفة من التوزيع، ويُستخدم حسب طبيعة البيانات والسؤال المطروح.

لا تقتصر أهمية هذه المقاييس على الجانب النظري، بل تمتد إلى مجالات متعددة مثل الاقتصاد، التربية، الصحة، وعلم الاجتماع. فهي تُستخدم لاتخاذ قرارات مدروسة، كتحسين الرواتب، أو تقييم أداء الطلبة، أو تحليل نتائج التجارب. ومن هنا، فإن فهمها وتوظيفها بدقة يُعد خطوة أساسية في بناء تحليل إحصائي سليم.

أولاً: المتوسط الحسابي (Mean)

في حياتنا اليومية، نلجأ كثيراً إلى تلخيص مجموعة من الأرقام بقيمة واحدة تُعبر عنها بشكل عام. هذه القيمة تساعدنا على فهم الاتجاه العام للبيانات، وتُستخدم لاتخاذ قرارات مبنية على معلومات رقمية. من بين هذه القيم، يُعد المتوسط الحسابي أحد أكثر المقاييس شيوعاً واستخداماً.

1. تعريف المتوسط الحسابي

المتوسط الحسابي (يرمز له بـ $\bar{x}$) هو مقياس عددي يُستخدم لتحديد القيمة المركزية لمجموعة من البيانات الكمية، ويُحسب بقسمة مجموع القيم على عددها. يُعد من أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداماً، ويُعبر عن النقطة التي تتوازن حولها القيم في التوزيع الإحصائي، خاصة عندما تكون البيانات موزعة بشكل متماثل ولا تحتوي على انحرافات أو قيم متطرفة تؤثر على تمثيلها العام. يُستخدم المتوسط الحسابي في مجالات متعددة مثل التعليم (لحساب متوسط علامات الطلاب)، والاقتصاد (لحساب متوسط الأجور)، والصحة (لحساب متوسط عدد ساعات النوم أو معدل ضربات القلب)، وغيرها.

2. المتوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة (الأولية)

تنقسم البيانات الإحصائية غير المبوبة إلى نوعين رئيسيين بحسب طريقة عرضها. النوع الأول يشمل البيانات غير المتكررة (المفردة)، حيث تظهر كل قيمة مرة واحدة فقط، أما النوع الثاني فيتمثل في البيانات المتكررة (المرجحة)، التي تتكرر فيها بعض القيم أكثر من مرة. هذا التصنيف يُسهم في تحديد الطريقة المناسبة لحساب المتوسط بدقة.

2.2. البيانات غير المبوبة غير المتكررة (المفردة)

تُستخدم هذه الطريقة عندما تكون لدينا مجموعة من القيم الفردية، وكل قيمة تظهر مرة واحدة فقط. في هذه الحالة، نحسب المتوسط الحسابي بجمع هذه القيم معاً ثم قسمتها على عددها.

الصيغة:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

- x_i : القيم الفردية
- n : عدد القيم

مثال:

درجات طالب في خمس مواد:

70، 85، 90، 75، 80

$$\bar{x} = \frac{80 + 75 + 90 + 85 + 70}{5} = \frac{400}{5} = 80$$

إذاً، متوسط العلامات هو 80 .

2.2. البيانات غير المبوبة المتكررة (المرجحة)

عندما تتعامل مع البيانات غير المبوبة المتكررة (المرجحة)، فإن بعض القيم تظهر أكثر من مرة داخل مجموعة البيانات. على سبيل المثال، قد تكرر القيمة "5" ثلاث مرات، بينما تظهر القيمة "7" مرة واحدة فقط. في هذه الحالة، لا يمكننا حساب المتوسط الحسابي بمجرد جمع القيم وقسمتها على عددها، لأن التكرار (أو ما يُعرف بالوزن) يؤثر على النتيجة.

لذلك، يجب أن نأخذ عدد مرات تكرار كل قيمة في الحسبان عند الحساب، وذلك بضرب كل قيمة في عدد مرات ظهورها، ثم جمع هذه النتائج، وأخيراً قسمتها على مجموع التكرارات الكلي. هذه الطريقة تضمن أن القيم المتكررة تُعطى وزناً أكبر في حساب المتوسط، مما يعكس تأثيرها الحقيقي في البيانات.

الصيغة:

$$\bar{x} = \frac{\sum(x_i \times f_i)}{\sum f_i}$$

• x_i : القيمة

• f_i : التكرار

مثال:

أجور موظفين في شركة:

عدد الموظفين (التكرار)	الأجر (دج)
2	40,000
3	50,000
1	60,000

$$\bar{x} = \frac{(40,000 \times 2) + (50,000 \times 3) + (60,000 \times 1)}{2 + 3 + 1} = \frac{290,000}{6} \approx 48,333.33$$

إذاً، متوسط الأجر هو 48,333.33 دينار.

3. المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة

يُستخدم المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة عند تنظيم القيم في جداول تحتوي على فئات وتكرارات، مما يتطلب أسلوباً خاصاً في الحساب. وتنقسم هذه البيانات إلى نوعين: الكمية المنفصلة التي تمثل قيماً محددة ومنفصلة، والكمية المتصلة التي تُعرض ضمن فئات ذات مدى. يتيح هذا التصنيف اختيار الطريقة المناسبة لحساب المتوسط بما يتوافق مع طبيعة توزيع البيانات.

1.3. البيانات المبوبة الكمية المنفصلة

تُستخدم عندما تُقسم البيانات إلى فئات منفصلة (مثل عدد أفراد الأسرة، عدد السيارات، عدد الكتب).

الصيغة: المعادلة هي نفسها معادلة المتوسط الحسابي للبيانات المرجحة.

$$\bar{x} = \frac{\sum(x_i \times f_i)}{\sum f_i}$$

• x_i : القيمة المنفصلة

• f_i : التكرار

مثال:

عدد الكتب التي يملكها طلاب:

عدد الطلاب	عدد الكتب
4	2
5	3
1	5

$$\bar{x} = \frac{(2 \times 4) + (3 \times 5) + (5 \times 1)}{4 + 5 + 1} = \frac{8 + 15 + 5}{10} = \frac{28}{10} = 2.8$$

إذاً، متوسط عدد الكتب هو 2.8 كتاب.

2.3. البيانات المبوبة الكمية المتصلة

تُستخدم عندما تُقسم البيانات إلى فئات تحتوي على مدى من القيم (مثل أطوال، أوزان، أعمار).

الصيغة:

$$\bar{x} = \frac{\sum(x_m \times f)}{\sum f}$$

• x_m : مركز الفئة (المتوسط بين الحد الأدنى والأقصى)

• f : التكرار

مثال:

إليك أطوال مجموعة من الطلاب:

عدد الطلاب	الفئة (سم)
3	140-149
5	150-159
2	160-169

حساب مراكز الفئات: (المتوسط بين الحد الأدنى والحد الأعلى لكل فئة)

• مركز الفئة (140-149): 144.5، مركز الفئة (150-159): 154.5، مركز الفئة (160-169): 164.5

$$\bar{x} = \frac{(144.5 \times 3) + (154.5 \times 5) + (164.5 \times 2)}{3 + 5 + 2} = \frac{433.5 + 772.5 + 329}{10} = \frac{1535}{10} = 153.5$$

إذاً، متوسط الطول هو 153.5 سم.

خلاصة الأنواع والصيغ:

النوع	الصيغة	متى يُستخدم؟
غير مبوبة مفردة	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	عندما تكون القيم غير متكررة
غير مبوبة مريحة	$\bar{x} = \frac{\sum(x_i \times f_i)}{\sum f_i}$	عندما تتكرر القيم
مبوبة منفصلة	نفس صيغة المريحة	عندما تكون القيم منفصلة
مبوبة متصلة	$\bar{x} = \frac{\sum(x_m \times f)}{\sum f}$	عندما تكون القيم ضمن فئات متصلة

4. المتوسط الحسابي المريح للأوساط الحسابية

عندما تكون لدينا عدة مجموعات (مثل صفوف دراسية أو أقسام في شركة)، ولكل مجموعة متوسط حسابي خاص بها، فإننا نحتاج أحياناً إلى حساب المتوسط الكلي لجميع المجموعات. لكن لا يمكننا الاكتفاء بحساب متوسط الأوساط مباشرة، لأن كل مجموعة قد تحتوي على عدد مختلف من الأفراد.

لذلك، نستخدم المتوسط المرجح الذي يأخذ في الحسبان عدد العناصر في كل مجموعة، بحيث يكون تأثير كل متوسط جزئي متناسباً مع حجم مجموعته.

الصيغة الرياضية:

$$\bar{x}_{\text{المرجح}} = \frac{\sum(\bar{x}_i \times n_i)}{\sum n_i}$$

- $\bar{x}_i$: المتوسط الحسابي للمجموعة الفرعية رقم i
- n_i : عدد العناصر في المجموعة الفرعية رقم i
- $\sum n_i$: مجموع العناصر في جميع المجموعات

مثال تطبيقي:

لدينا ثلاث شعب دراسية، وكل شعبة لها متوسط علامات مختلف وعدد طلاب مختلف:

الشعبة	عدد الطلاب n_i	متوسط العلامات في كل مجموعة $\bar{x}$
علوم	20	75
آداب	30	80
اقتصاد	25	70

نحسب المتوسط المرجح كالتالي:

$$\bar{x}_{\text{المرجح}} = \frac{(75 \times 20) + (80 \times 30) + (70 \times 25)}{20 + 30 + 25} = \frac{1500 + 2400 + 1750}{75} = \frac{5650}{75} \approx 75.33$$

إذاً، المتوسط المرجح لجميع الطلاب هو 75.33.

لماذا نستخدم هذا النوع من المتوسط؟

لأن المجموعات ليست متساوية الحجم، فلو حسبنا متوسط الأوساط مباشرة:

$$\frac{75 + 80 + 70}{3} = 75$$

سيكون الناتج غير دقيق، لأنه يعطي كل مجموعة نفس الوزن، حتى لو كانت تحتوي على عدد أقل من الأفراد. المتوسط المرجح يعطي كل متوسط جزئي وزنه الحقيقي حسب عدد العناصر، مما يجعل النتيجة أكثر تمثيلاً للواقع.

تحفظات حول استخدام المتوسط الحسابي

رغم أن المتوسط الحسابي يُعد من أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداماً، إلا أن له قيوداً يجب الانتباه لها عند تحليل البيانات:

- يتأثر بالقيم المتطرفة: إذا كانت هناك قيمة عالية جداً أو منخفضة جداً مقارنة بباقي القيم، فإن المتوسط الحسابي قد لا يعبر بدقة عن "المعدل الحقيقي".

مثال: في صف دراسي، إذا حصل معظم الطلاب على علامات بين 70 و 80، لكن طالباً واحداً حصل على 20، فإن المتوسط سينخفض بشكل غير عادل.

- لا يمكن حسابه لبعض أنواع البيانات: المتوسط الحسابي لا يُستخدم مع البيانات الاسمية أو الوصفية مثل الألوان أو أسماء المدن، لأنه يتطلب بيانات عددية قابلة للجمع.

- لا يُحسب من الجداول التكرارية المفتوحة: إذا كانت فئات التوزيع التكراري تحتوي على حدود غير محددة (مثل "أكثر من 100" أو "أقل من 10")، فإن حساب المتوسط يصبح غير دقيق أو غير ممكن، لأنه يعتمد على مراكز الفئات التي لا يمكن تحديدها بدقة في هذه الحالة.

ثانياً: المنوال (Mode)

عند التعامل مع مجموعات كبيرة من البيانات، تظهر الحاجة إلى فهم الأنماط التي تتكرر داخلها بشكل واضح. فبعض القيم تبرز أكثر من غيرها، ليس لأنها الأعلى أو الأدنى، بل لأنها تتكرر بشكل لافت. هذا التكرار يمنحنا مؤشراً مهماً حول ما هو شائع أو مألوف في تلك المجموعة، ويساعدنا على استخلاص رؤى دقيقة حول التوزيع العام للبيانات. من خلال التركيز على هذه القيم المتكررة، يمكننا بناء تصورات أكثر واقعية حول الظواهر المدروسة، سواء كانت اجتماعية، اقتصادية، أو علمية.

1. تعريف المنوال:

المنوال (يرمز له بـ Mo) هو مقياس عددي يُستخدم لتحديد القيمة الأكثر تكراراً ضمن مجموعة من البيانات الكمية أو الوصفية. يُعد من مقاييس النزعة المركزية التي تُعبر عن النمط السائد أو الأكثر شيوعاً في التوزيع الإحصائي، ويُعطي مؤشراً واضحاً حول القيم التي تتكرر بشكل ملحوظ. يتميز المنوال بقدرته على تمثيل البيانات التي تحتوي على تكرار أو توزيع غير متماثل، كما أنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة، مما يجعله مناسباً لتحليل البيانات المنحرفة أو غير الطبيعية.

يُستخدم المنوال في مجالات متعددة مثل التسويق (لتحديد المنتج الأكثر طلباً)، والتعليم (لتحديد الدرجة الأكثر شيوعاً بين الطلاب)، والصحة العامة (لتحديد العرض الأكثر تكراراً في مجموعة مرضى)، وغيرها.

2. طريقة حساب المنوال للبيانات المنفصلة (غير مبوبة)

للتذكير، البيانات المنفصلة هي بيانات عددية تأخذ قيماً محددة ومنفصلة، مثل عدد الإخوة، عدد السيارات، عدد الحصص.

طريقة الحساب:

- نحصى عدد مرات تكرار كل قيمة.
- المنوال هو القيمة ذات أعلى تكرار.
- إذا لم تتكرر أي قيمة ← لا يوجد منوال.
- إذا تكررت أكثر من قيمة بنفس التكرار الأعلى ← البيانات متعددة المنوال.

مثال:

عدد الكتب التي قرأها مجموعة طلاب:

3، 4، 2، 5، 3، 4، 5، 2، 5، 3

• التكرارات:

○ 2 ← 2 مرات

○ 3 ← 3 مرات

○ 4 ← 2 مرات

○ 5 ← 3 مرات

يوجد منوالان: 3 و 5 (كلاهما تكرر 3 مرات)

3. طريقة حساب المنوال للبيانات المبوبة (في شكل فئات)

في هذه الحالة، يتم تحديد الفئة التي تحتوي على أكبر تكرار، وتسمى الفئة المنوالية. ثم يُحسب المنوال باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$Mo = L + \left(\frac{f_1 - f_0}{(2f_1 - f_0 - f_2)} \right) \times h$$

حيث:

- L : الحد الأدنى للفئة المنوالية
- f_1 : تكرار الفئة المنوالية
- f_0 : تكرار الفئة السابقة
- f_2 : تكرار الفئة التالية
- h : طول الفئة

1.3. حساب المنوال لبيانات مبوبة منتظمة

منتظمة: تعني أن الفئات متساوية الطول

التكرار	الفئة (Classes)
1	10 - 20
10	20 - 30
25	30 - 40
20	40 - 50
10	50 - 60

- الفئة المنوالية 30 - 40: (لأن تكرارها 25 وهو الأعلى)

- $L = 30, f_1 = 25, f_0 = 10, f_2 = 20, h = 10$

$$Mo = 30 + \left(\frac{25 - 10}{2 \times 25 - 10 - 20} \right) \times 10 = 30 + \left(\frac{15}{20} \right) \times 10 = 30 + 7.5 = 37.5$$

إذاً، المنوال هو 37.5

2.3. حساب المنوال لبيانات مبوبة غير منتظمة

غير منتظمة: تعني أن الفئات غير متساوية في الطول مما يجعل حساب المنوال بالطريقة الرياضية التقليدية غير دقيق ما لم نقوم بتعديل الفئات أو استخدام صيغة مناسبة.

التكرار	الفئة (Classes)
1	10 - 20
10	20 - 50
25	50 - 70
20	70 - 110
1	110 - 120

ملاحظة مهمة:

الفئات غير متساوية الطول:

- الفئة 10-20 طولها = 10
- الفئة 20-50 طولها = 30
- الفئة 50-70 طولها = 20
- الفئة 70-110 طولها = 40

وهذا يؤثر على تحديد الفئة المنوالية بدقة، لأن التكرار وحده لا يكفي، يجب أن نأخذ كثافة التكرار بعين الاعتبار.

بمعنى أن الفئة المنوالية هي الفئة الأعلى كثافة.

الخطوة الأولى: حساب كثافة التكرار لكل فئة

كثافة التكرار = التكرار ÷ طول الفئة

كثافة التكرار	طول الفئة	التكرار	الفئة
0.10	10	1	10 – 20
0.33	30	10	20 – 50
1.25	20	25	50 – 70
0.50	40	20	70 – 110
0.10	10	1	110 – 120

الفئة المنوالية

أعلى كثافة تكرار = 1.25 ← الفئة المنوالية هي 50 – 70

الخطوة الثانية: تطبيق الصيغة المعدلة لحساب المنوال

نستخدم الصيغة الرياضية التقليدية، لكن بعد التأكد من أن الفئة المنوالية تم تحديدها بناءً على كثافة التكرار وليس التكرار فقط.

القيم المطلوبة:

- $L = 50$ (الحد الأدنى للفئة المنوالية)
- $f_1 = 25$ (تكرار الفئة المنوالية)
- $f_0 = 10$ (تكرار الفئة السابقة: 20-50)
- $f_2 = 20$ (تكرار الفئة التالية: 70-110)
- $h = 20$ (طول الفئة المنوالية: 50-70)

تطبيق الصيغة:

$$Mo = 50 + \left(\frac{25 - 10}{2 \times 25 - 10 - 20} \right) \times 20 = 50 + \left(\frac{15}{50 - 30} \right) \times 20 = 50 + \left(\frac{15}{20} \right) \times 20 = 50 + 15 = 65$$

إذاً، المنوال هو 65

خلاصة:

- في حالة الفئات غير المتساوية، لا يكفي النظر إلى التكرار فقط.
- يجب حساب كثافة التكرار لتحديد الفئة المنوالية بدقة.
- بعد تحديد الفئة، يمكن استخدام الصيغة الرياضية لحساب المنوال.

4. المنوال في البيانات المتصلة (Continuous Data)

البيانات المتصلة تُقسم إلى فئات (Intervals)، مثل الأطوال أو الأوزان.

تنقسم طرق الحساب إلى:

1.4. الطريقة الرياضية (الصيغة التحليلية)

الصيغة:

$$Mo = L + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

حيث:

- L : الحد الأدنى للفئة المنوالية

- f_1 : تكرار الفئة المنوالية
- f_0 : تكرار الفئة السابقة
- f_2 : تكرار الفئة التالية
- h : طول الفئة

مثال: لاحظ أطوال 25 تلميذا

الفئة (سم)	التكرار
140-149	5
150-159	12
160-169	8

- الفئة المنوالية: 150-159

- $L = 150, f_1 = 12, f_0 = 5, f_2 = 8, h = 10$

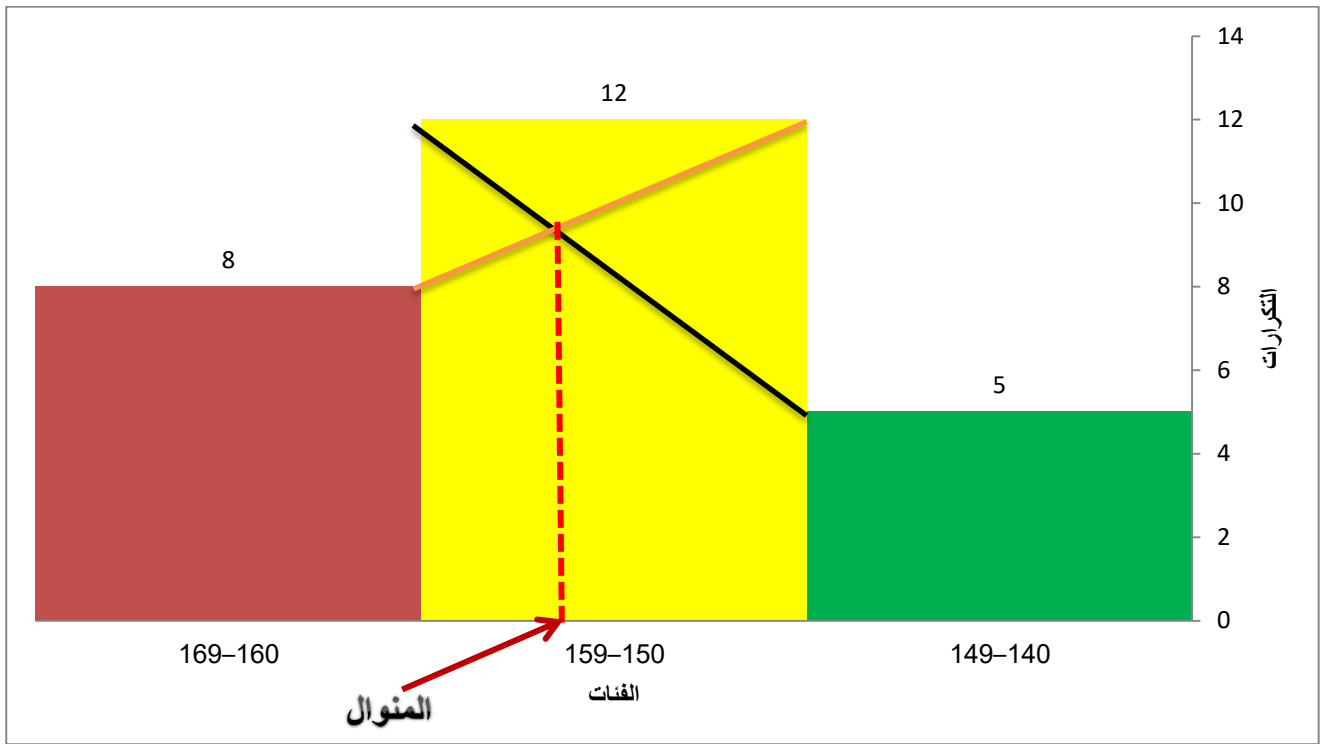
$$Mo = 150 + \left(\frac{12 - 5}{2 \times 12 - 5 - 8} \right) \times 10 = 150 + \left(\frac{7}{11} \right) \times 10 \approx 156.36$$

إذا، المنوال يساوي بالتقريب 156.36

2.4. الطريقة البيانية (المدرج التكراري)

خطواتها:

- (1) نرسم مدرجاً تكرارياً للفئات.
 - (2) نحدد أعلى مستطيل (الفئة المنوالية).
 - (3) نرسم خطين مائلين من رؤوس المستطيلات المجاورة إلى رأس الفئة المنوالية.
 - (4) نحدد نقطة التقاطع، ثم نسقطها عمودياً على المحور الأفقي.
 - (5) النقطة الناتجة تمثل المنوال التقريبي.
- تُستخدم هذه الطريقة عندما تكون الفئات غير منتظمة أو يصعب تطبيق الصيغة الرياضية.



يمكن التعرف على المنوال بصرياً بأنه في حدود 156 سم.

ملاحظات ختامية حول المنوال

- يمثل القيمة الأكثر تكراراً في البيانات.
- يمكن استخدامه مع البيانات الكمية والكيفية (مثل الألوان أو أنواع السيارات).
- لا يتأثر بالقيم المتطرفة، على عكس المتوسط الحسابي.
- يمكن أن يكون:
 - منوالاً واحداً (Unimodal)
 - منوالين (Bimodal)
 - متعدد المنوال (Multimodal)
 - بدون منوال (No Mode)
- سهل التحديد بصرياً من خلال المدرج التكراري.

ثالثاً: الوسيط (Median)

عند تحليل البيانات الرقمية، لا يكون التركيز دائماً على القيم الأعلى أو الأدنى، بل كثيراً ما نحتاج إلى معرفة النقطة التي تفصل بين جزأين متساويين من البيانات. هذه النقطة، التي يُطلق عليها اسم الوسيط، تمنحنا تصوراً متوازناً حول توزيع القيم، وتساعدنا على فهم الاتجاه العام دون أن تتأثر بالقيم المتطرفة أو غير المعتادة. في مثل هذه الحالات، يظهر الوسيط كأحد المقاييس الإحصائية التي تلعب دوراً مهماً في تقديم صورة عادلة عن مركز البيانات، خاصة عندما تكون التوزيعات غير متماثلة أو تحتوي على انحرافات واضحة.

1. تعريف الوسيط

الوسيط (يرمز له Me) هو مقياس عددي يُستخدم لتحديد القيمة التي تقع في منتصف مجموعة من البيانات المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً. يُعد من مقاييس النزعة المركزية التي تُعبر عن النقطة التي تفصل البيانات إلى نصفين متساويين، بحيث يكون نصف القيم

أقل منها والنصف الآخر أعلى. يتميز الوسيط بقدرته على تمثيل البيانات بشكل عادل، خاصة في الحالات التي تحتوي على قيم متطرفة أو توزيع غير متماثل، حيث لا يتأثر بتلك القيم كما يفعل المتوسط الحسابي.

يُستخدم الوسيط في مجالات متعددة مثل الاقتصاد (حساب الدخل الوسيط للعائلات)، والعقارات (لتحديد السعر الوسيط للمنازل)، والتعليم (لمعرفة الدرجة التي تفصل بين أداء الطلاب)، وغيرها.

2. حساب الوسيط في حالة البيانات غير المبوبة

البيانات غير المبوبة هي بيانات خام غير منظمة، تُعرض على شكل قائمة من القيم دون تقسيمها إلى فئات أو جداول تكرارية.

مثلاً: 7، 3، 9، 5، 11

على الرغم من أن الوسيط (Me) هو القيمة التي تقع في منتصف مجموعة من البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً. وهذا أمر واضح وسهل إذا كان عدد القيم فردياً، أما إذا كان عدد القيم زوجياً، يكون الوسيط هو متوسط القيمتين اللتين تقعان في الوسط.

1.2. في حالة عدد القيم n فردي

خطوات الحساب:

أ. رتب القيم تصاعدياً.

ب. احسب رتبة الوسيط (R_{Me}) باستخدام الصيغة:

$$R_{Me} = \frac{n + 1}{2}$$

3. الوسيط هو القيمة التي تقع في هذه الرتبة.

مثال تطبيقي:

البيانات:

15، 9، 12، 7، 5

• الترتيب: 5، 7، 9، 12، 15

• عدد القيم: $n = 5$

• رتبة الوسيط:

$$R_{Me} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

• الوسيط = القيمة الثالثة = 9

2.2. في حالة عدد القيم n زوجي

خطوات الحساب:

ج. رتب القيم تصاعدياً.

د. احسب رتبتين:

$$R_1 = \frac{n}{2}, \quad R_2 = R_1 + 1$$

3. الوسيط هو متوسط القيمتين في الرتبتين:

$$Me = \frac{x_{R_1} + x_{R_2}}{2}$$

مثال تطبيقي:

البيانات:

40، 30، 10، 20

• الترتيب: 40، 30، 20، 10

• عدد القيم: $n = 4$

• الرتبتان: $R_1 = 2, R_2 = 3$

• القيمة في رتبة الوسيط الأولى R_1 هي: $x_2 = 20$ القيمة في رتبة الوسيط الثانية R_2 هي: $x_3 = 30$

$$Me = \frac{x_{R_1} + x_{R_2}}{2} \quad \text{بالتعويض} \quad Me = \frac{20 + 30}{2} = 25$$

3. حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة (توزيع تكراري)

عند التعامل مع بيانات مبوبة في شكل توزيع تكراري، تختلف طريقة حساب الوسيط حسب نوع البيانات: كمية متصلة أو كمية منفصلة، ويُراعى ترتيب الفئات أو القيم وتحديد موقع الوسيط بدقة باستخدام التكرار التجميعي.

1.3. حساب الوسيط Me في حالة البيانات الكمية المتصلة

عندما تكون البيانات مبوبة في شكل فئات متصلة (Intervals)، يُحسب الوسيط باستخدام الصيغة:

$$Me = L + \left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f} \right) \times h$$

شرح الرموز:

- Me : الوسيط
- L : الحد الأدنى للفئة الوسيطة
- n : مجموع التكرارات الكلي
- F : مجموع التكرارات السابقة للفئة الوسيطة
- f : تكرار الفئة الوسيطة
- h : طول الفئة

مثال تطبيقي:

نفترض أن لدينا توزيعاً تكرارياً لعدد الموظفين في الإدارات الحكومية حسب عدد سنوات الخبرة:

عدد الموظفين (التكرار)	سنوات الخبرة (الفئات)
12	0-5
18	5-10
25	10-15
20	15-20
10	20-25

$$n = 12 + 18 + 25 + 20 + 10 = 85$$

• حساب مجموع التكرارات (عدد الموظفين في المثال)

$$R_{Me} = \frac{n}{2} = \frac{85}{2} = 42.5$$

• حساب رتبة الوسيط

• حساب التكرار التجميعي الصاعد:

المقصود بـ "التكرار التجميعي الصاعد" (كما تم تناوله في محاضرة سابقة) هو مجموع التكرارات المتراكمة من بداية الجدول حتى الفئة المعنية، أي أنه يُحسب بجمع التكرارات تدريجياً من أول فئة حتى الفئة الحالية.

في المثال:

الفئة	التكرار	التكرار التجميعي الصاعد
0-5	12	12
5-10	18	12 + 18 = 30
10-15	25	30 + 25 = 55

• نبحث عن الفئة التي تحتوي على هذه الرتبة داخل التكرار التجميعي الصاعد.

• نلاحظ أن:

○ الفئة 0-5 تنتهي عند 12 ← لا تحتوي على الوسيط

○ الفئة 5-10 تنتهي عند 30 ← لا تحتوي على الوسيط

○ الفئة 10-15 تنتهي عند 55 ← تحتوي على الوسيط

بما أن 42.5 تقع بين 30 و 55، فإن الفئة 10-15 هي التي تحتوي على الوسيط، وتُسمى الفئة الوسيطة.

• إذاً:

$$L = 10 \quad \circ$$

$$F = 30 \quad \circ$$

$$f = 25 \quad \circ$$

$$h = 5 \quad \circ$$

$$Me = 10 + \left(\frac{42.5 - 30}{25} \right) \times 5 = 10 + \left(\frac{12.5}{25} \right) \times 5 = 10 + 2.5 = 12.5$$

الوسيط لسنوات الخبرة هو 12.5 سنة، أي أن نصف الموظفين لديهم خبرة أقل من 12.5 سنة والنصف الآخر أكثر.

2.3. حساب الوسيط Me في حالة البيانات الكمية المنفصلة

في هذه الحالة، تكون البيانات عبارة عن قيم محددة (Discrete) مع تكراراتها، ويُحسب الوسيط كالتالي:

عند التعامل مع بيانات منفصلة (Discrete Data)، مثل عدد الاجتماعات في الأسبوع، عدد الموظفين في المؤسسة أو عدد الأطفال في الأسرة... إلخ، تتبع الخطوات التالية لحساب الوسيط:

أ. ترتيب القيم تصاعدياً

نرتب القيم العددية تصاعدياً بدءاً من القيمة الأقل إلى الأعلى، مثل ترتيب عدد الاجتماعات من 1 إلى 5. أثناء ذلك، نُسجل عدد مرات ظهور كل قيمة (التكرار) لنتمكن لاحقاً من تحديد موقع الوسيط بدقة.

ب. حساب مجموع التكرارات n

نقوم بجمع جميع التكرارات المرتبطة بالقيم للحصول على العدد الإجمالي للعينة. هذا المجموع يُستخدم لتحديد موقع الوسيط داخل ترتيب البيانات.

ج. تحديد رتبة الوسيط

- إذا كان n فردياً:

$$R_{Me} = \frac{n+1}{2}$$

أي أن الوسيط هو القيمة التي تقع في هذه المرتبة.

- إذا كان n زوجياً:

$$Me = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}$$

أي أن الوسيط هو متوسط القيمتين الواقعتين في المرتبتين $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$.

د. حساب التكرار التجميعي الصاعد

نحسب التكرار التجميعي الصاعد لكل قيمة، أي مجموع التكرارات من أول قيمة حتى القيمة الحالية، لتحديد موقع الوسيط بدقة.

مثال تطبيقي: عدد الكتب التي قرأها الطلاب خلال الشهر

في هذا المثال، لدينا بيانات تمثل عدد الكتب التي قرأها مجموعة من الطلاب خلال شهر معين، بالإضافة إلى عدد الطلاب الذين قرأوا كل عدد من الكتب. الهدف هو حساب الوسيط (Me) لتحديد عدد الكتب الذي يقع في منتصف التوزيع. هذه البيانات تُعد كمية منفصلة لأنها تمثل أعداداً محددة (Discrete values)، وليست فئات متصلة. الهدف من المثال هو حساب الوسيط (Me)، أي عدد الكتب الذي يقع في منتصف التوزيع، بحيث يكون نصف الطلاب قد قرأوا أقل منه والنصف الآخر أكثر.

نستخدم هذه الطريقة في التحليل التربوي لفهم مدى التزام الطلاب بالقراءة، وتحديد القيمة النموذجية التي تعكس سلوك الأغلبية.

انظر الجدول الموالي الذي يتضمن عدد الكتب في الشهر وعدد الطلاب الذين قرأوها إضافة إلى قيم التكرار التجميعي الصاعد

التراكمي التجميعي	عدد الطلاب (التكرار)	عدد الكتب (الفئات)
3	3	2
$3 + 5 = 8$	5	3
$8 + 6 = 14$	6	4
$14 + 4 = 18$	4	5

- مجموع التكرارات (إجمالي الطلاب) زوجي عدد $\leftarrow 18 = 3 + 5 + 6 + 4 = n$ وبالتالي هنالك رتبتين للوسيط
- رتبتا الوسيط:

$$\frac{n}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \text{الرتبة الأولى} \quad \text{والرتبة الثانية} \quad \frac{n}{2} + 1 = 10$$

- نبحث عن القيم التي تقع في المرتبتين 9 و 10 باستخدام التكرار التجميعي الصاعد:

- التكرار التجميعي حتى فئة الكتب ذات القيمة 2 = 3 (يشمل الطلاب من 1 إلى 3)
- التكرار التجميعي حتى فئة الكتب ذات القيمة 3 = 8 (يشمل الطلاب من 4 إلى 8)
- التكرار التجميعي حتى فئة الكتب ذات القيمة 4 = 14 (يشمل الطلاب من 9 إلى 14)

إذا، المرتبتان 9 و10 تقعان ضمن الفئة التي قيمتها 4 كتب (لأن التكرار التجميعي عند الفئة 4 هو 14 بينما التي قبلها ينتهي في 8، وبالتالي التكرار التجميعي عند الفئة 4 هو الذي يشمل المرتبتين 9 و10).
إذا: القيمة في المرتبة 9 هي 4 وكذلك القيمة في المرتبة 10 هي 4، وبالتالي الوسيط هو:

$$Me = \frac{4 + 4}{2} = 4$$

الوسيط لعدد الكتب هو 4 كتب، أي أن نصف الطلاب قرأوا أقل من 4 كتب والنصف الآخر قرأوا أكثر.
4. الوسيط بيانياً

لحساب الوسيط بيانياً من خلال التمثيل البياني للتوزيع التكراري، يتم اتباع خطوات منظمة تعتمد على الرسم البياني للمدرج التكراري أو المنحنى التكراري وفق الخطوات التالية:

أ. رسم التكرار التجميعي الصاعد:

- نرسم محور الأفقي (س) ليمثل الفئات أو حدودها.
- نرسم محور العمودي (ص) ليمثل التكرار التجميعي الصاعد.

ب. تحديد رتبة الوسيط:

- نحسب $\frac{n}{2}$ ، حيث n هو مجموع التكرارات.
- نحدد هذه القيمة على محور التكرار (ص).

ج. رسم خط أفقي:

- من النقطة التي تمثل $\frac{n}{2}$ على محور ص، نرسم خطاً أفقياً حتى يتقاطع مع المنحنى أو الخط المرسوم.

د. إسقاط عمودي:

- من نقطة التقاطع، نرسم خطاً عمودياً نحو محور س (الفئات).
- النقطة التي يصل إليها هذا الخط تمثل قيمة الوسيط.

ملاحظات مهمة:

- هذه الطريقة تُستخدم غالباً مع البيانات المبوبة الكمية المتصلة.
- يجب أن تكون الفئات متساوية في العرض لتكون القراءة البيانية دقيقة.
- الوسيط البياني يعطي تقديراً تقريبياً، وقد يختلف قليلاً عن الحساب العددي.

مثال تطبيقي

في هذا المثال سيتم حساب الوسيط بيانياً باستخدام توزيع تكراري لعدد الطلاب حسب عدد ساعات المذاكرة الأسبوعية:
جدول البيانات:

عدد الطلاب (التكرار)	عدد ساعات المذاكرة (الفئة)
5	0-4
8	5-9
12	10-14
10	15-19
5	20-24

الخطوات:

أ. مجموع التكرارات:

$$n = 5 + 8 + 12 + 10 + 5 = 40$$

ب. رتبة الوسيط:

$$\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

ج. التكرار التجميعي الصاعد:

الفئة	التكرار	التكرار التجميعي الصاعد
0-4	5	5
5-9	8	5 + 8 = 13
10-14	12	13 + 12 = 25
15-19	10	25 + 10 = 35
20-24	5	35 + 5 = 40

4. تحديد الفئة الوسيطة:

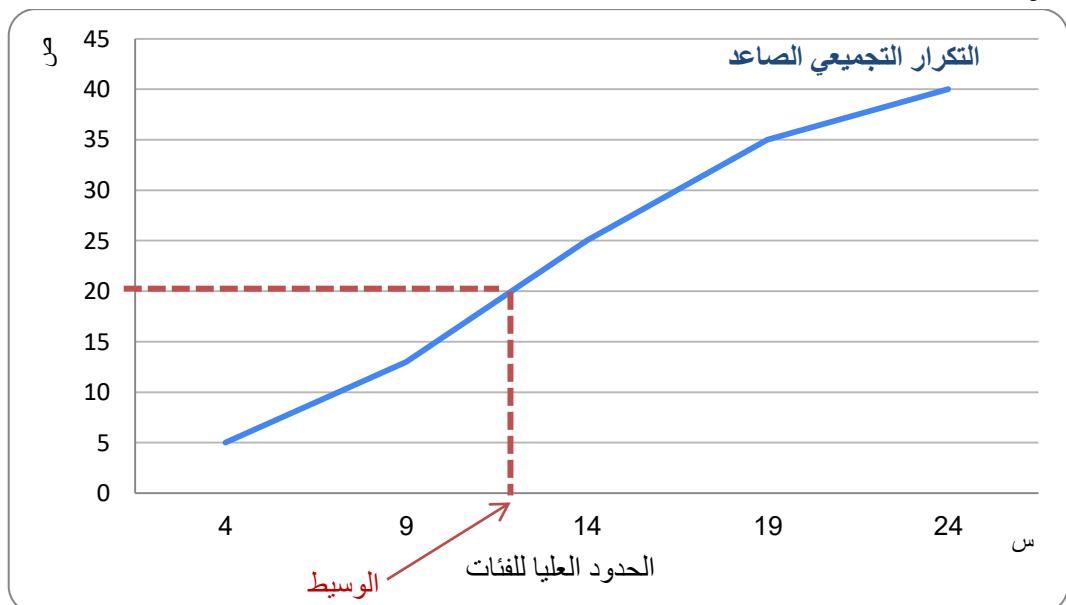
○ رتبة الوسيط = 20

○ الفئة التي تحتوي على الرتبة 20 هي 10-14 لأنها تقع بين 13 و 25

خطوات الرسم البياني:

- على المحور الأفقي (س): نضع الحدود العليا للفئات (4، 9، 14، 19، 24) (ملاحظة: 25 هي قيمة مضافة من أجل الشكل).
- على المحور العمودي (ص): نضع التكرار التجميعي الصاعد (5، 13، 25، 35، 40)
- نرسم النقاط ونصل بينها بخطوط مستقيمة
- نحدد النقطة 20 على محور (ص)، ونرسم منها خطاً أفقياً حتى يتقاطع مع المنحنى
- من نقطة التقاطع، نرسم خطاً عمودياً نحو محور (س)
- النقطة التي يصل إليها الخط العمودي تمثل قيمة الوسيط التقديرية

الشكل



تقع قيمة الوسيط بصريا بين 12 و 13 ساعة مذاكرة.

لونتأكد من ذلك حسابيا، وذلك من خلال التعويض في القانون التالي:

$$Me = L + \left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f} \right) \times h$$

- مجموع التكرارات $n = 40$
- رتبة الوسيط $\frac{n}{2} = 20$
- الفئة الوسيطة: 10-14
- $L = 10$ ← الحد الأدنى للفئة الوسيطة
- $F = 13$ ← التكرار التجميعي للفئة السابقة (5-9)
- $f = 12$ ← تكرار الفئة الوسيطة
- $h = 5$ ← طول الفئة (14 - 10)

التعويض في القانون:

$$Me = 10 + \left(\frac{20 - 13}{12} \right) \times 5$$

$$Me = 10 + \left(\frac{7}{12} \right) \times 5$$

$$Me = 10 + 2.92 \approx 12.92$$

إذا، قيمة الوسيط التقديرية هي حوالي 12.92 ساعة من المذاكرة الأسبوعية.

5. خصائص الوسيط

- أ. لا يتأثر بالقيم المتطرفة
- الوسيط يعكس القيمة الوسطى في البيانات، لذلك لا يتأثر بالقيم الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً كما يفعل المتوسط الحسابي.
- ب. يُستخدم مع البيانات المرتبة
- لحساب الوسيط، يجب ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً، لأنه يعتمد على موقع القيمة وليس على مجموعها.
- ج. مناسب للبيانات الكمية والمنفصلة والمبوبة
- يمكن استخدامه مع مختلف أنواع البيانات، سواء كانت مفردة أو ضمن فئات.
- د. يُعطي تمثيلاً جيداً لمركز التوزيع
- خاصة عندما تكون البيانات غير متماثلة أو تحتوي على تباين كبير.
- هـ. لا يعتمد على جميع القيم
- بل يعتمد فقط على موقع القيمة الوسطى، مما يجعله أكثر استقراراً في بعض الحالات.

تمرين حول مقاييس النزعة المركزية

في استبيان حول نسبة المشاركة في الانتخابات المحلية عبر 20 بلدية، تم تجميع النتائج في توزيع تكراري كما يلي:

التكرار f_i	فئة النسبة (%)
3	40-49
8	50-59
5	60-69
3	70-79
1	80-89

المطلوب:

- حساب، المتوسط، الوسيط والمنوال.
- تفسير النتائج

الحل النموذجي

- طبيعة البيانات في هذا التمرين هي بيانات مبوبة كمية متصلة (Grouped Continuous Quantitative Data)، لأنها موزعة على فئات متصلة (Intervals) تمثل نسب المشاركة المئوية.
- عدد البلديات الكلي $n = 20$ ، طول الفئة $h = 10$.

1. المتوسط الحسابي

- الصيغة:

$$\bar{x} = \frac{\sum(x_m \times f)}{\sum f}$$

- مراكز الفئات x_m :

$$44.5, 54.5, 64.5, 74.5, 84.5$$

- الحساب:

$$\sum(x_m \times f) = 3 \cdot 44.5 + 8 \cdot 54.5 + 5 \cdot 64.5 + 3 \cdot 74.5 + 1 \cdot 84.5 = 1200$$

$$\bar{x} = \frac{1200}{20} = 60$$

$$\text{المتوسط} = 60\%$$

2. الوسيط

- الصيغة:

$$Me = L + \left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f} \right) \times h$$

- تحديد الفئة الوسيطة:

$$\frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

التكرارات التجميعية الصاعدة :

التكرار التجميعي الصاعد	التكرار f_i	الفئة (%)
3	3	40-49
3+8=11	8	50-59
11+5=16	5	60-69
16+3=19	3	70-79
19+1=20	1	80-89

• مجموع التكرارات $n = 20 \Rightarrow \frac{n}{2} = 10$

• القيمة العاشرة تقع في الفئة 50-59 ← هي الفئة الوسيطة.

• القيم:

$$L = 49.5, \quad F = 3, \quad f = 8, \quad h = 10$$

• الحساب:

$$Me = 49.5 + \left(\frac{10 - 3}{8} \right) \times 10$$

$$Me = 49.5 + \frac{7}{8} \cdot 10 = 49.5 + 8.75 = 58.25$$

الوسيط $\approx 58.25\%$

3. المنوال

• الصيغة:

$$Mo = L + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

• تحديد الفئة المنوالية:

• الفئة 50-59 حيث تكرارها هو $f_1 = 8$

• تكرار الفئة السابقة $f_0 = 3$ ، تكرار الفئة الموالية $f_2 = 5$

• القيم:

$$L = 49.5, \quad f_1 = 8, \quad f_0 = 3, \quad f_2 = 5, \quad h = 10$$

• الحساب:

$$Mo = 49.5 + \left(\frac{8 - 3}{2 \cdot 8 - 3 - 5} \right) \times 10$$

$$Mo = 49.5 + \left(\frac{5}{16 - 8} \right) \times 10$$

$$Mo = 49.5 + \left(\frac{5}{8} \right) \times 10 = 49.5 + 6.25 = 55.75$$

المنوال $\approx 55.75\%$

تفسير النتائج

تُظهر مقاييس النزعة المركزية أن المشاركة الانتخابية في هذه العينة تتركز حول منتصف الخمسينيات؛ إذ إن المتوسط (60%) يعكس المعدل العام، بينما الوسيط (58.25%) يحدد النقطة التي تنقسم عندها البلديات إلى نصفين، والمنوال (55.75%) يبرز الفئة الأكثر شيوعاً. هذا التوافق بين الوسيط والمنوال يشير إلى أن السلوك الانتخابي السائد يميل إلى المشاركة المتوسطة، مع وجود بعض الحالات الاستثنائية ذات نسب منخفضة أو مرتفعة، وهو ما يعكس تبايناً محلياً يمكن تفسيره بعوامل اجتماعية وسياسية مثل قوة الحملات أو درجة التنافسية.