Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département d'informatique

Année universitaire 2025-2026

Analyse 1

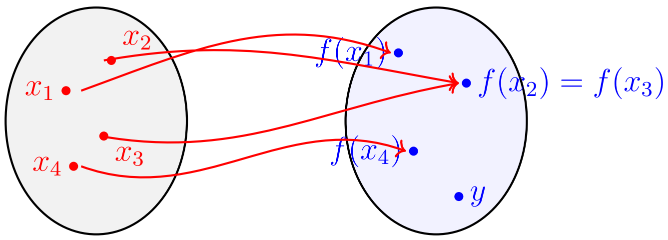
par
Yasmina Daikh

Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle

4.1 Notion de fonction

Définition 4.1.1. *Une fonction réelle f d'une variable réelle est la donnée d'un ensemble $D_f \subseteq \mathbb{R}$ et d'une relation qui à tout $x \in D_f$ associe **un et un seul** réel $f(x) \in \mathbb{R}$. On appelle D_f le domaine de définition de la fonction f et on écrit $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$.*



Exemples.

1. $f(x) = 2x + 3, f(0) = 3, f(1) = 5, f(-2) = -1$. *Chaque x a une unique image.*
2. *La relation $y = \pm\sqrt{x}$ **n'est pas** une fonction car à $x = 4$ correspondent deux valeurs $y = 2$ et $y = -2$.*
3.

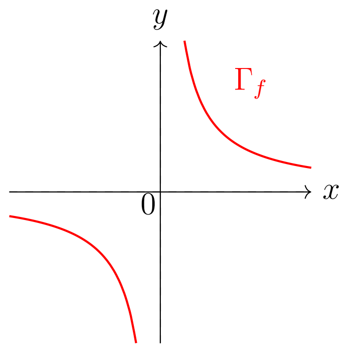
$$f(x) = \frac{1}{x-2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$
$$g(x) = \sqrt{x+4} \Rightarrow D_g = [-4, +\infty[.$$
$$h(x) = \ln(x-3) \Rightarrow D_h =]3, +\infty[.$$

Le graphe d'une fonction $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}.$$

Exemple. *Soit $f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.*
Le graphe de f est :

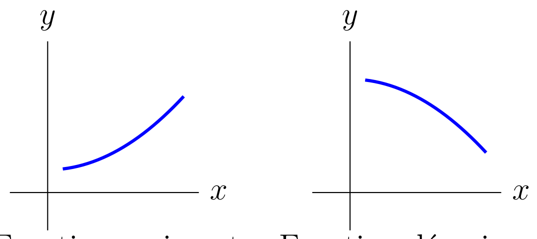
$$\Gamma_f = \left\{ \left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$



4.2 Sens de variation

Définition 4.2.1. *Une fonction f est dite :*

- *croissante sur D_f si : $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$*
- *décroissante sur D_f si : $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$*
- *strictement croissante/décroissante avec des inégalités strictes*



Exemples :

$$f(x) = 2x + 1 : \text{strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$
$$g(x) = -x^2 : \text{croissante sur }]-\infty; 0], \text{ décroissante sur } [0; +\infty[.$$

4.3 Opérations sur les fonctions

Définition 4.3.1.

- *Somme : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $D_{f+g} = D_f \cap D_g$*
- *Produit : $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, $D_{f\times g} = D_f \cap D_g$*
- *Composée : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$*
- *Inverse : $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$, $D_{1/f} = \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}$*

Exemple. *Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ alors $(f+g)(x) = x^2+\sqrt{x}$ et $(f\circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ sur $\mathbb{R}^+$).*

4.4 Parité et périodicité

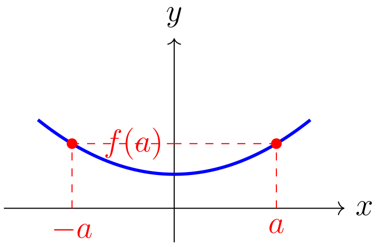
Définition 4.4.1. *(parité) Soit f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a] (a > 0)$ ou $\mathbb{R}$. On dit que :*

- *f est paire si :* $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.
- *f est impaire si :* $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

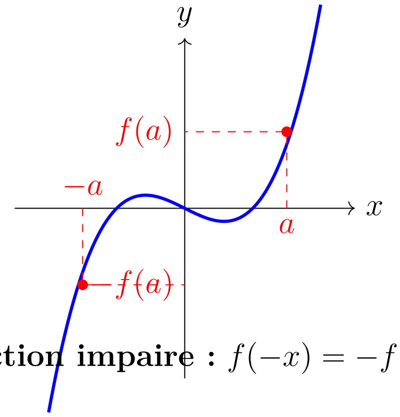
Interprétation graphique :

f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).

f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).



Fonction paire : $f(-x) = f(x)$



Fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$

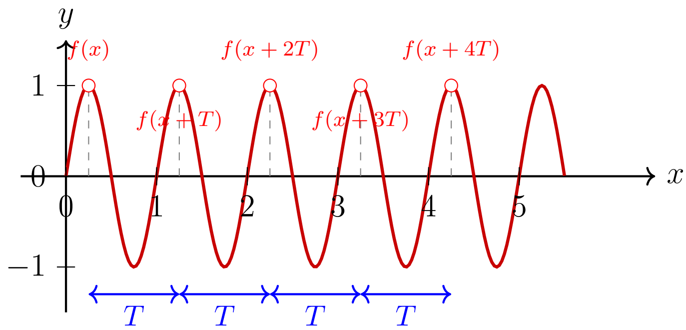
Exemples.

- *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est paire.*
- *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ est impaire.*
- *La fonction* $\cos : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *est paire. La fonction* $\sin : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *est impaire.*
- *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire.*

Définition 4.4.2. *(périodicité) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ si :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

Interprétation graphique : Une fonction f est **périodique** de période $T > 0$ si son graphe se répète identiquement sur des intervalles de longueur T.

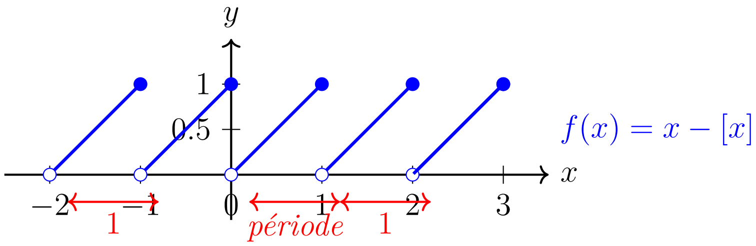


Exemples.

1. *Les fonctions trigonométriques* $\cos : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *et* $\sin : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *sont périodiques de période 2π. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x),$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

2. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - [x]$ est périodique. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :*
$$f(x+k) = (x+k) - [x+k] = (x+k) - ([x]+k) = x - [x] = f(x).$$
Ainsi, 1 est une période de f, et tout entier naturel non nul k est également une période.



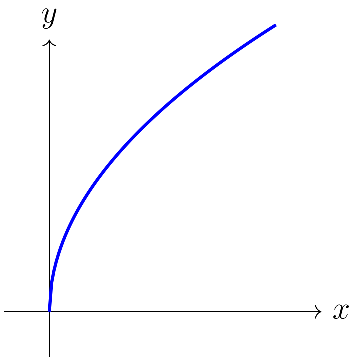
4.5 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 4.5.1. *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

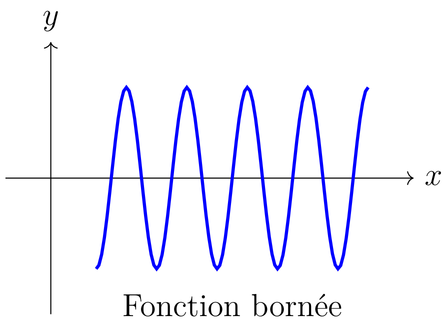
— *f est majorée sur I si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$.*

— *f est minorée sur I si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$.*

— *f est bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire : $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$.*



Fonction minorée mais non majorée



Fonction bornée

Exemples.

1. *Soit $f(x) = \sin(x)$, $\quad D_f = \mathbb{R}$.*
   Majorée : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \leq 1$ (majorant : $M = 1$).
   Minorée : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \geq -1$ (minorant : $m = -1$).
   Bornée : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq 1$.
2. *Soit $g(x) = -x^2$, $\quad D_g = \mathbb{R}$.*
   — *Majorée : $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leq 0$ (majorant : $M = 0$).*
   — *Non minorée : quand $x \to \infty$, $g(x) \to -\infty$*
3. *Soit $h(x) = x^2$, $\quad D_h = \mathbb{R}$.*
   — *Minorée : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ (minorant : $m = 0$).*
   — *Non majorée : quand $x \to \infty$, $h(x) \to +\infty$.*
4. *Soit $t(x) = x^3$, $\quad D_t = \mathbb{R}$.*
   — *Non majorée : quand $x \to +\infty$, $t(x) \to +\infty$*
   — *Non minorée : quand $x \to -\infty$, $t(x) \to -\infty$.*

4.6 Limites

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou une extrémité de I.

Définition 4.6.1. *(Limite finie en un point) On dit que la fonction f admet pour limite le nombre réel ℓ quand x tend vers x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Remarque. *La définition mathématique de la limite peut s'interpréter géométriquement en termes d'intervalles :*

— *L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ définit un* ***intervalle ouvert*** *centré en x_0 :*

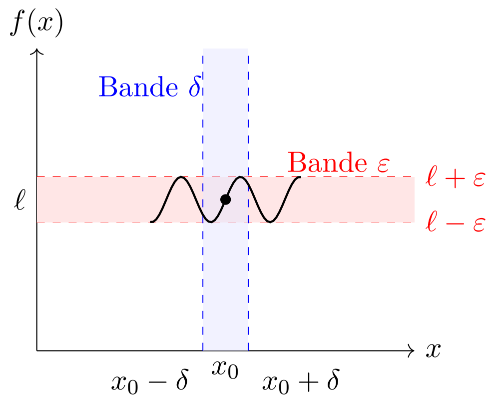
$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Cet intervalle représente un voisinage de x_0 sur l'axe des abscisses.

— *L'inégalité $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ définit un* ***intervalle ouvert*** *centré en ℓ :*

$$f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

Cet intervalle représente un voisinage de ℓ sur l'axe des ordonnées.



Exemple. *Soit $f(x) = 3x + 1$. Montrons que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$.*

Pour tout $\varepsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que :

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |(3x + 1) - 7| < \varepsilon$$

Or $|3x - 6| = 3|x - 2| < \varepsilon$. Il suffit donc de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, la définition est vérifiée.

Définition 4.6.2. *(Limite à droite) La fonction f admet pour limite ℓ à droite en x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

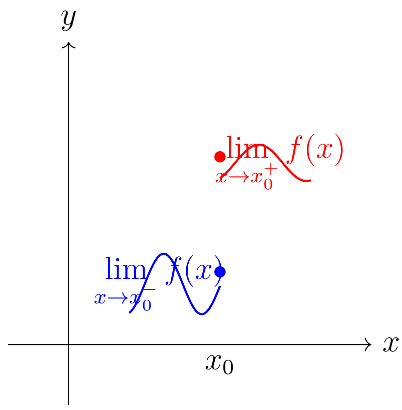
On note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Définition 4.6.3. *(Limite à gauche) La fonction f admet pour limite ℓ à gauche en x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \ \forall x \in I,\ 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

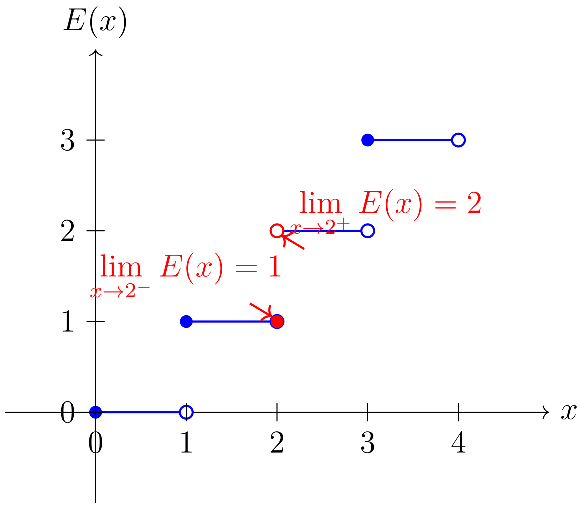
Remarque. *Si la fonction f a une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite en x_0 coïncident et valent* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.



Exemple. *Soit la fonction partie entière $f(x) = E(x)$. En $x_0 = 2$:*

- ***Limite à gauche*** *:* $\lim\limits_{x \to 2^-} E(x) = 1$
- ***Limite à droite*** *:* $\lim\limits_{x \to 2^+} E(x) = 2$

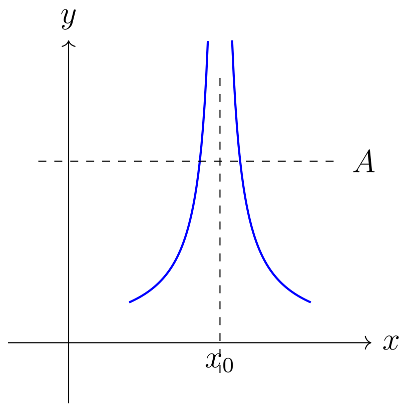
Puisque les limites à gauche et à droite sont différentes, ***la limite en 2 n'existe pas****.*



Définition 4.6.4. *(Limite $+\infty$ en un point) On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si :*

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in I\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.



Exemple. *Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Montrons que $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$:
Soit $A > 0$ un réel arbitraire. On cherche $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad |x-1| < \delta \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > A$$

On a

$$\frac{1}{(x-1)^2} > A \iff (x-1)^2 < \frac{1}{A} \iff |x-1| < \frac{1}{\sqrt{A}}$$

On choisit donc $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$.
Vérifions que ce choix fonctionne :
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $|x-1| < \delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$. Alors :

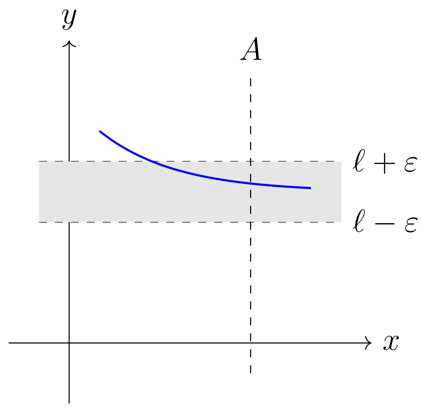
$$|x-1| < \frac{1}{\sqrt{A}} \Rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > A$$

Ce qui prouve que $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$. La droite $x = 1$ est une **asymptote verticale**.

Définition 4.6.5. *(Limite ℓ en $+\infty$) On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists M > 0 \text{ tel que } x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$



Exemple. *Soit* $f(x) = \frac{1}{x} + 2$*. Montrons que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$*.*

Pour tout $\varepsilon > 0$*, on cherche* $M > 0$ *tel que :*

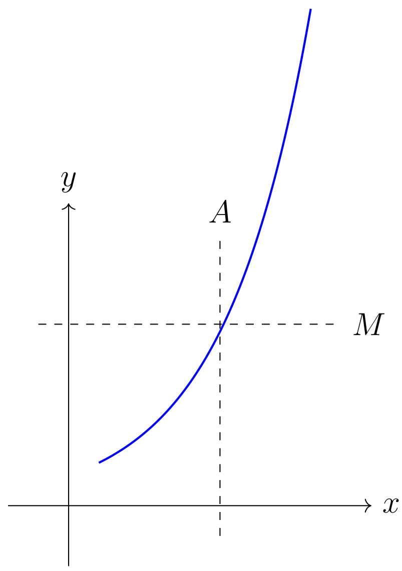
$$x > M \Rightarrow \left|\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 2\right| < \varepsilon$$

C'est-à-dire $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$*, soit* $x > \frac{1}{\varepsilon}$*. Il suffit donc de prendre* $M = \frac{1}{\varepsilon}$*. La droite* $y = 2$ *est une* ***asymptote horizontale****.*

Définition 4.6.6. *(Limite $+\infty$ en $+\infty$) On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall A > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } x > M \Rightarrow f(x) > A$$

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Exemple. *Montrons que* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ *en utilisant la définition mathématique de la limite.*

Soit $A > 0$ *arbitraire. Nous cherchons un réel* $M > 0$ *tel que pour tout* $x > M$*, on ait* $x^2 > A$*.*

Comme $x > 0$ *(puisque* $x \to +\infty$*), la dernière inégalité est équivalente à :*

$$x > \sqrt{A}.$$

Posons $M = \sqrt{A}$ *:*

$$x > \sqrt{A} \Rightarrow x^2 > (\sqrt{A})^2 \Rightarrow x^2 > A$$

Ce qui prouve que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$*.*

Proposition 4.6.1. *(Unicité de la limite) Si une fonction f admet une limite en x_0, alors cette limite est unique.*

La démonstration de cette proposition est similaire à celle de l'unicité de la limite pour les suites.

Les théorèmes suivants permettent de calculer la limite d'une fonction en un point x_0 (fini ou infini) à partir des limites de ses composantes. Ces résultats sont essentiels pour le calcul pratique des limites.

Proposition 4.6.2. *(Opérations algébriques sur les limites) Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$. Alors :*

1. ***Somme :*** $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$
2. ***Produit :*** $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot \ell'$
3. ***Quotient :*** *Si* $\ell' \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$
4. ***Multiplication par un scalaire :*** *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x)] = \lambda \ell$

Démonstration.

Preuve pour la somme :

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par définition :

— $\exists \delta_1 > 0$ tel que $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

— $\exists \delta_2 > 0$ tel que $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors pour tout x tel que $0 < |x - x_0| < \delta$:

$$|(f(x) + g(x)) - (\ell + \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui prouve que $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$.

Preuve pour le produit :

Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que $|f(x)g(x) - \ell\ell'| < \varepsilon$ pour x assez proche de x_0. On écrit :

$$|f(x)g(x) - \ell\ell'| = |f(x)g(x) - \ell g(x) + \ell g(x) - \ell\ell'| \leq |g(x)||f(x) - \ell| + |\ell||g(x) - \ell'|$$

Comme $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$, il existe δ_1 tel que pour $0 < |x - x_0| < \delta_1$, $|g(x)| < |\ell'| + 1$. De plus :

— $\exists \delta_2$ tel que pour $0 < |x - x_0| < \delta_2$, $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell'|+1)}$

— $\exists \delta_3$ tel que pour $0 < |x - x_0| < \delta_3$, $|g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Alors pour tout x tel que $0 < |x - x_0| < \delta$:

$$|f(x)g(x) - \ell\ell'| < (|\ell'| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\ell'| + 1)} + |\ell| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Exemples.

1. *Calculer* $\lim_{x \to 2} \left(x^2 + \dfrac{1}{x - 1}\right)$.

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4 \quad et \quad \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 1} = 1$$

Par la propriété de la somme :

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 + \frac{1}{x - 1}\right) = 4 + 1 = 5$$

2. *Calculer* $\lim_{x \to 1} \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} \right)$.

$$\lim_{x \to 1} (3x^2 - 2x + 1) = 3 - 2 + 1 = 2, \quad \lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2$$

Par la propriété du quotient :

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} \right) = \frac{2}{2} = 1$$

Proposition 4.6.3. *Si* $\lim_{x \to x_0} f = \ell$ *et* $\lim_{x \to \ell} g = \ell'$, *alors* $\lim_{x \to x_0} (g \circ f) = \ell'$.

Exemple. *Soit* $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = \sqrt{x}$. *On considère la limite en* $x_0 = 2$.

On a :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

et

$$\lim_{x \to 4} g(x) = \lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$$

D'après la proposition, on a :

$$\lim_{x \to 2} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to 2} \sqrt{x^2} = 2.$$

Proposition 4.6.4.

- *Si* $f \leq g$ *et* $\lim_{x \to x_0} f = \ell$ *et* $\lim_{x \to x_0} g = \ell'$, *alors* $\ell \leq \ell'$.
- *Si* $f \leq g$ *et* $\lim_{x \to x_0} f = +\infty$, *alors* $\lim_{x \to x_0} g = +\infty$.

Théorème 4.6.7. *(Théorème des gendarmes) Si* $f \leq g \leq h$ *et si* $\lim_{x \to x_0} f = \lim_{x \to x_0} h = \ell$, *alors* g *a une limite en* x_0 *et* $\lim_{x \to x_0} g = \ell$.

Exemple. *Calculer* $\lim_{x \to 0} (x \cdot \sin(\frac{1}{x}))$.

On a

$$-|x| \leq x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \leq |x|$$

Comme $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, *par le théorème des gendarmes :*

$$\lim_{x \to 0} (x \cdot \sin(\frac{1}{x})) = 0$$

- **Formes indéterminées :** $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^∞ ; 0^0.

4.7 Fonctions continues

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in I$.

4.7.1 Définitions

Définition 4.7.1. *(Continuité en un point) On dit que f est continue au point $a \in I$ ssi :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

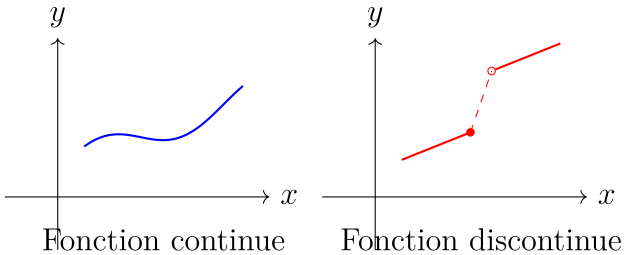
Cette définition équivaut à la définition mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 4.7.2. *(Continuité sur un intervalle) La fonction f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I.*

• **Interprétation géométrique de la continuité sur I :**

Une fonction est continue sur un intervalle I si on peut tracer son graphe sans lever le crayon. Graphiquement, cela se traduit par une courbe sans saut.



Fonction continue   Fonction discontinue

Exemple. *La fonction $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que :*

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon$$

Or $|x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$. Si $|x - a| < 1$, alors $|x| < |a| + 1$, donc $|x + a| < 2|a| + 1$. Choisissons $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1}\right)$. Alors :

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \delta(2|a| + 1) \leq \varepsilon.$$

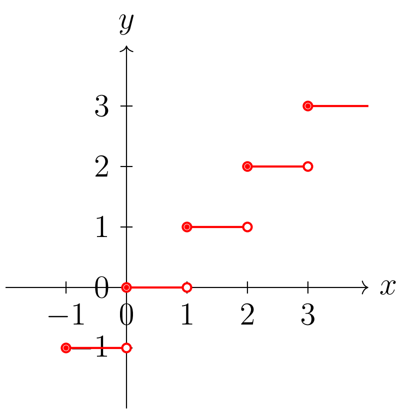
4.7.2 Discontinuités de première et de seconde espèce

Définition 4.7.3. *Une fonction f présente une discontinuité de première espèce en a si :*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_2$$

avec $\ell_1 \neq \ell_2$ et $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

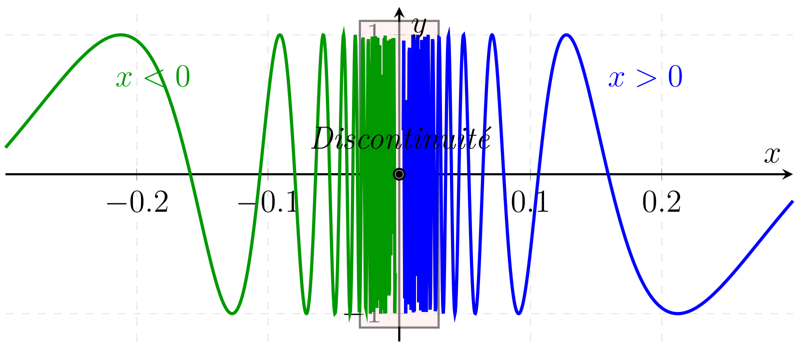
Exemple. *La fonction partie entière $f(x) = E(x)$ présente des discontinuités de première espèce en tous les entiers.*



Définition 4.7.4. *Une fonction f présente une discontinuité de seconde espèce en a si au moins une des limites latérales(à gauche ou à droite) n'existe pas ou est infinie.*

Exemples.

1. *$f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 0$: limites infinies*
2. *La fonction $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x = 0$ est un exemple classique de discontinuité de seconde espèce.*
   Lorsque x s'approche de 0, l'argument $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini et la fonction sinus oscille de manière de plus en plus rapide entre -1 et 1. Il n'y a donc pas de limite ni à gauche, ni à droite.



Zone d'oscillation infinie

4.7.3 Prolongement par continuité

Définition 4.7.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I, et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

On dit que f admet un prolongement par continuité au point a s'il existe un réel ℓ tel que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Dans ce cas, on définit la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est alors continue au point a et s'appelle le prolongement par continuité de f en a.

Exemples.

1. *Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

f est-elle prolongeable par continuité à $[-1, 1]$?

La fonction f est définie et continue sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

Étude du prolongement en $x = 0$ ***:*** *Nous sommes en présence d'une forme indéterminée* $\frac{0}{0}$*. Utilisons la quantité conjuguée :*

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$f(x) = \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

Pour $x \neq 0$*, on simplifie :*

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

La limite en $x = 0$ *vaut donc :*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

On a $\ell = 1$*. Le prolongement par continuité est :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

2. *Soit* $g : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$g(x) = \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

La fonction g *est définie et continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$*.*

Étude du prolongement en $x = \frac{\pi}{2}$ ***:*** *Faisons un changement de variable en posant* $t = x - \frac{\pi}{2}$*. Quand* $x \to \frac{\pi}{2}$*, on a* $t \to 0$*.*

On a $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin(t)$*, donc :*

$$g(x) = -\frac{\sin(t)}{t}$$

On sait que $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$*, donc :*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{t \to 0} \left(-\frac{\sin t}{t}\right) = -1$$

On a $\ell = -1$*. Le prolongement par continuité est :*

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} & si\ x \neq \frac{\pi}{2} \\ -1 & si\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

4.7.4 Caractérisation séquentielle de la continuité

La continuité d'une fonction en un point peut être caractérisée à l'aide des suites.

Théorème 4.7.6. *La fonction f est continue au point a si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de I qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*

$$f \text{ est continue en } a \iff \left[\left(\lim_{n\to\infty} u_n = a\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)\right)\right],$$

pour toute suite (u_n) de I convergeant vers a.

Ce qui équivaut à :

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right).$$

Remarque. *Ce théorème signifie qu'une fonction continue « préserve » les limites de suites : l'image d'une suite convergeant vers a est une suite convergeant vers $f(a)$.*

Ce théorème est particulièrement utile pour prouver qu'une fonction n'est pas continue en un point. Il suffit d'exhiber une seule suite (u_n) convergeant vers a telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

Exemple. *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Prenons la suite :

$$u_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$$

Cette suite converge vers 0, mais :

$$f(u_n) = \sin\left((2n+\tfrac{1}{2})\pi\right) = 1 \to 1 \neq f(0).$$

On a donc exhibé une suite (u_n) convergeant vers 0 telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(0)$. La fonction f n'est pas continue en 0.

4.7.5 Continuité uniforme

Définition 4.7.7. *La fonction f est uniformément continue sur I si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque. *Contrairement à la continuité (simple) qui est une propriété ponctuelle, la continuité uniforme est une propriété globale sur tout l'intervalle. Le δ doit fonctionner pour* ***toutes les paires de points*** *de l'intervalle, indépendamment de leur position.*

Proposition 4.7.1. *f est uniformément continue sur $I \Longrightarrow f$ est continue sur I.*

Démonstration. Soit f uniformément continue sur I. Montrons qu'elle est continue en tout point $a \in I$.

— Par continuité uniforme : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in I, \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

— En particulier, pour $y = a$ fixé, on a :

$$\forall x \in I, \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

— Ce qui est exactement la définition de la continuité de f au point a

$\square$

Remarque. *La réciproque est fausse : la continuité sur $I \not\Rightarrow$ la continuité uniforme sur I.*

Exemple. *Soit f définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.*
La fonction f est continue sur $]0, 1]$. Montrons qu'elle n'est pas uniformément continue, c'est à dire $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b]$ avec $|x-y| < \delta$ mais $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

— *Considérons les suites dans I : $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 2$*
— *Alors : $|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$*
— *Mais : $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - (n + 1)| = 1$*
— *Donc pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 > \varepsilon$ pour tout n.*

4.7.6 Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé

Théorème 4.7.8. *(Théorème de Heine) Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ est uniformément continue sur cet intervalle.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f est continue sur $[a, b]$ mais non uniformément continue. Alors

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b] \text{ avec } |x - y| < \delta \text{ mais } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Prenons $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. On obtient deux suites (x_n) et (y_n) dans $[a, b]$ telles que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

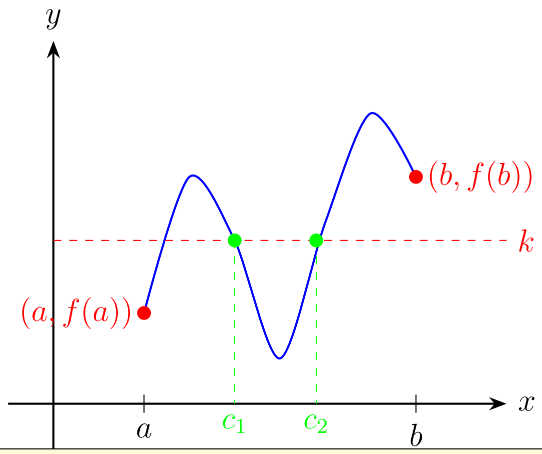
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, (x_n) admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $c \in [a, b]$.
Comme $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)} \to 0$, on a $y_{\varphi(n)} \to c$.
Par continuité de f en c :

$$f(x_{\varphi(n)}) \to f(c) \quad \text{et} \quad f(y_{\varphi(n)}) \to f(c)$$

Donc $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \to 0$, ce qui contredit $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$. $\square$

Exemple. *$f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ (car continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$) mais pas sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 4.7.9. *(Théorème des valeurs intermédiaires TVI) Si f est continue sur $[a, b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.*



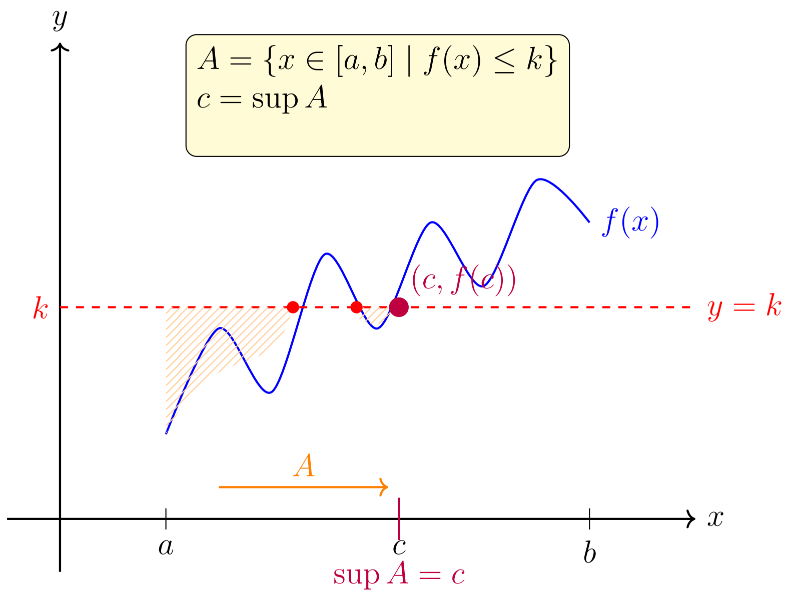
Pour toute valeur intermédiaire k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$

Pour la preuve du théorème on a besoin du lemme suivant

Lemme 4.7.10. *(Caractérisation séquentielle de la borne supérieure). Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée, et soit $c = \sup A$. Alors il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers c.*

Démonstration. (du Théorème 4.7.9) : Sans perte de généralité, supposons $f(a) \leq k \leq f(b)$.

Considérons l'ensemble $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq k\}$. A est non vide ($a \in A$) et majoré par b. Soit $c = \sup A$. Montrons que $f(c) = k$.



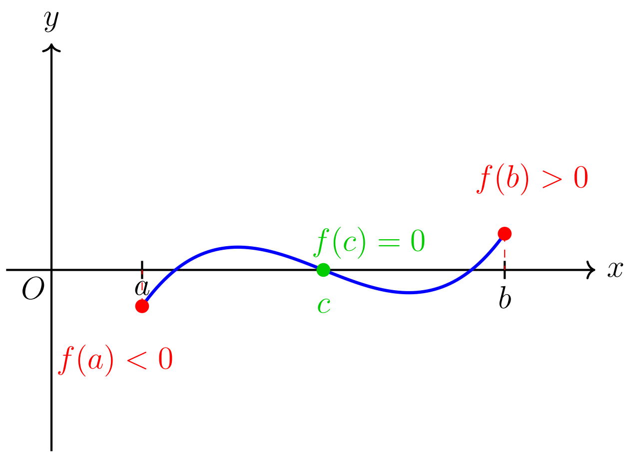
- Montrons tout d'abord que $f(c) \leq k$. Comme $c = \sup A$, par le Lemme 4.7.10, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenue dans A telle que (x_n) converge vers c.
  D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $x_n \in A$, on a
  $$f(x_n) \leq k. \tag{4.1}$$
  D'autre part, comme f est continue en c, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(c)$.
  On en déduit donc, par passage à la limite dans (4.1), que $f(c) \leq k$.

- Montrons maintenant que $f(c) \geq k$.
  Remarquons tout d'abord que si $c = b$, alors on a fini, puisque $f(b) \geq k$.
  Sinon, pour tout $x \in]c, b]$, comme $x \notin A$, on a
  $$f(x) > k. \tag{4.2}$$
  Or, étant donné que f est continue en c, f admet une limite à droite en c, qui vaut $f(c)$ et par passage à a limite dans (4.2) on obtient $f(c) \geq k$.

$\square$

Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 4.7.11. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$ (c'est-à-dire $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires). Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*



Interprétation géométrique : Si la fonction continue change de signe sur l'intervalle $[a, b]$, son graphe doit nécessairement couper l'axe des abscisses en au moins un point c entre a et b.

Démonstration. L'hypothèse $f(a) \times f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Par le TVI appliqué avec $k = 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
De plus, comme $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, on a nécessairement $c \in]a, b[$. $\square$

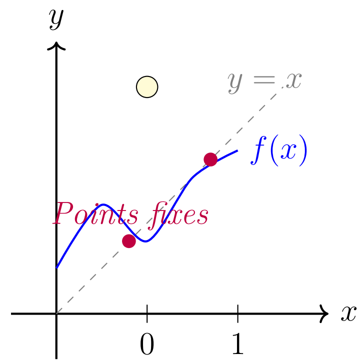
Exemples.

1. *Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.*
   Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Cette fonction est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0, 1]$. On a
   $$f(0) = 0^3 - 3 \times 0 + 1 = 1 > 0$$
   $$f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 1 = -1 < 0.$$
   On a donc $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$. Comme f est continue sur $[0, 1]$ et que 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$, le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) assure qu'il existe au moins un réel $c \in]0, 1[$ tel que :
   $$f(c) = 0 \quad \textit{c'est-à-dire} \quad c^3 - 3c + 1 = 0$$
   La solution c est approximativement $0,347$.

2. *Pour tout $a > 0$ et tout entier $n \geq 1$, l'équation $x^n = a$ admet une unique solution positive. En effet, soit $f(x) = x^n - a$. Alors :*
   - $f(0) = -a < 0$
   - $f(1+a) = (1+a)^n - a > 0$ *pour* $a > 0$
   - f *est continue sur* $[0, 1+a]$

   Par le TVI, il existe $c \in]0, 1+a[$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire $c^n = a$.
3. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Alors f admet au moins un point fixe. Soit $g(x) = f(x) - x$. Alors :*
   - $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ *(car* $f(0) \in [0,1]$*)*
   - $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ *(car* $f(1) \in [0,1]$*)*
   - g *est continue sur* $[0,1]$

   Si $g(0) = 0$ ou $g(1) = 0$, c'est terminé. Sinon, par le TVI, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.



Corollaire 4.7.12. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est également un intervalle.*

Théorème 4.7.13. *Si f est continue sur $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f n'est pas bornée supérieurement.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > n$.

(x_n) est bornée (car $\subset [a,b]$), par le théorème de Bolzano-Weierstrass, (x_n) admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $c \in [a,b]$.
Par continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \to f(c)$, mais $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \to +\infty$, contradiction. □

Théorème 4.7.14. *(Théorème des bornes atteintes). Si f est continue sur l'intervalle borné et fermé $[a,b]$, alors f atteint ses bornes :*

$$\exists c, d \in [a,b] \text{ tels que } f(c) = \inf_{[a,b]} f \text{ et } f(d) = \sup_{[a,b]} f$$

Exercice : Soit la fonction f définie sur l'intervalle fermé borné $[-1,3]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 1}$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-1,3]$.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur $[-1,3]$.

3. Déterminer les valeurs du maximum et du minimum de f sur $[-1, 3]$.
4. Donner un exemple de fonction continue sur un intervalle non fermé qui n'atteint pas ses bornes.

Solution :

1. **Tableau de variations de f**

   La fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $[-1, 3]$.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+1) - (x^2-2x+4)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 - 2x^3 + 4x^2 - 8x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x - 2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2 - 3x - 1)}{(x^2+1)^2}$$

   Le dénominateur étant toujours positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 3x - 1$.

   Racines : $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. Sur $[-1, 3]$, seule $x_0 = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2} \approx -0,30$ appartient à l'intervalle.

x	-1		x_0		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{7}{2}$ $3,5$	$\nearrow$	$f(x_0)$ $\approx 4,15$	$\searrow$	$\frac{7}{10}$ $0,7$

2. **Existence du maximum et du minimum**

   La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[-1, 3]$. D'après le théorème des bornes atteintes, toute fonction continue sur un segment atteint ses bornes. Ainsi, f admet un maximum et un minimum sur $[-1, 3]$.

3. **Valeurs du maximum et du minimum**

   D'après le tableau de variations :

   — Le maximum est $f(x_0) = f\left(\dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) \approx 4,15$

   — Le minimum est $f(3) = \dfrac{7}{10} = 0,7$

4. **Exemple de fonction continue sur un intervalle non fermé n'atteignant pas ses bornes**

   Soit $g(x) = x$ définie sur $]0, 1]$. Cette fonction est continue sur $]0, 1]$ mais :

   — Elle n'atteint pas sa borne inférieure 0 car $0 \notin]0, 1]$

   — Elle atteint sa borne supérieure 1 en $x = 1$

   Un autre exemple : $h(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, 1]$ est continue mais n'atteint pas sa borne supérieure qui est $+\infty$.

4.8 Fonctions monotones et bijection

Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$.

Définition 4.8.1. *Soit $f : E \to F$ une fonction.*

- *f est injective si $\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;*
- *f est surjective si $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$;*
- *f est bijective si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$.*

Proposition 4.8.1. *Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que*

$$g \circ f = id_E \quad \text{et} \quad f \circ g = id_F.$$

La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.

Théorème 4.8.2. *(Théorème de la bijection).*

- *Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle image $J := f(I)$.*
- *La fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*

Remarque. *La stricte monotonnie $\Rightarrow$ l'injectivité. En effet, on considère deux cas selon le type de stricte monotonie.*

Cas 1 : f est strictement croissante

Par définition, f est strictement croissante si :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que :

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Par l'absurde, supposons que $x_1 \neq x_2$. Alors on a deux possibilités :

1. *Si $x_1 < x_2$, alors par stricte croissance : $f(x_1) < f(x_2)$*
   Contradiction avec l'hypothèse $f(x_1) = f(x_2)$.
2. *Si $x_1 > x_2$, alors par stricte croissance : $f(x_1) > f(x_2)$*
   Contradiction avec l'hypothèse $f(x_1) = f(x_2)$.

Dans les deux cas, on obtient une contradiction. Donc l'hypothèse $x_1 \neq x_2$ est fausse, et on a nécessairement $x_1 = x_2$.
Ainsi, on a bien montré $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Ce qui est exactement la définition de l'injectivité.

Cas 2 : f est strictement décroissante

Par définition, f est strictement décroissante si :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

La démonstration est analogue. Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Supposons par l'absurde que $x_1 \neq x_2$:

1. *Si $x_1 < x_2$, alors par stricte décroissance : $f(x_1) > f(x_2)$*
   Contradiction avec $f(x_1) = f(x_2)$.
2. *Si $x_1 > x_2$, alors par stricte décroissance : $f(x_1) < f(x_2)$*
   Contradiction avec $f(x_1) = f(x_2)$.

À nouveau, on obtient une contradiction dans les deux cas, donc $x_1 = x_2$.

Remarque. *Dans un repère orthonormé, les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.*

Exemple. *Soit la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :*

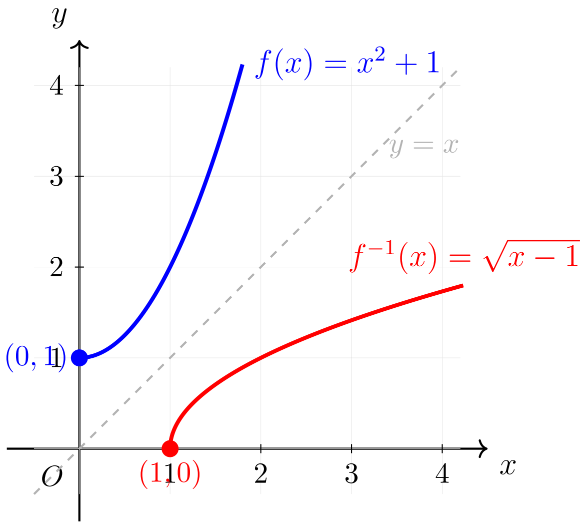
$$f(x) = x^2 + 1$$

1. *Montrer que f est bijective de I vers un intervalle J que l'on déterminera.*
2. *Tracer dans un repère orthonormé le graphe de f et de f^{-1}.*

Solution :

1. *La fonction $f(x) = x^2 + 1$ est :*
   — ***Continue*** *sur $I = [0, +\infty[$ car c'est une fonction polynomiale*
   — ***Strictement croissante*** *sur I car $f'(x) = 2x > 0$ pour tout $x > 0$*

   De plus :
   $$f(0) = 0^2 + 1 = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
   D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $I = [0, +\infty[$ vers $J = [1, +\infty[$.
2. ***Représentation graphique***



Références

1. **Exo7**, *Cours et exercices de mathématiques*, [En ligne]. "Les suites". Disponible sur : http ://exo7.emath.fr/cours/ch_suites.pdf.
2. **R. Costantini**, *Analyse pour débutants*, Dunod.
3. **J.-M. Monier**, *Analyse MPSI*, Dunod.