Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'informatique
Année universitaire : 2025-2026

Module : Analyse 1
Licence 1, informatique

Série de TD n° 4 : Fonctions réelles d'une variable réelle

Exercice 1 : Calculer si elles existent les limites suivantes

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} \qquad 2)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{E\big(\ln(\sqrt{x})\big)}{\sqrt{x}} \qquad 3)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{x}$$

$$4)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(3(x-1)\right)}{x-1}.$$

Exercice 2 : En utilisant la définition mathématique de la limite, montrer que :

$$\lim_{x\to 2}(2x^2-3)=5, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1}=2.$$

Exercice 3 : Déterminer le domaine de définition et le domaine de continuité des fonctions suivantes. Puis déterminer, lorsqu'elles existent, les limites aux bornes du domaine de définition :

1. $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}+\ln(4-x^2)$
2. $g(x)=\dfrac{1}{\sin x}$
3. $h(x)=\sqrt{x^2+x-1}$
4. $t(x)=\ln(x^3-1)$

(les questions 2., 3. et 4. sont laissées aux étudiants)

Exercice 4 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ une fonction telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad f(x)=f(x-1)f(x+1)$$

1. Montrer que f est périodique de période 6.
2. Vérifier que les fonctions $f_1(x)=e^{\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)}$ et $f_2(x)=e^{\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)}$ sont des solutions de cette équation (f_2 est laissée aux étudiants).

Exercice 5 :

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

   Étudier la parité de f.

2. Même question pour $g(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ (cette question est laissée aux étudiants)

Exercice 6 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Tracer le graphe de f pour une valeur de a et de b.

Exercice 7 : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x| - 1}}{\ln(x^2 - 3x + 2)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.
3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en certains points de son domaine ? Si oui, préciser en quels points et définir ce prolongement.

Exercice 8 : Dire si la fonction suivante est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier :

$$g(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0.$$

Exercice 9 : Soient $P(x) = x^5 - 3x - 2$ et $Q(x) = x^2 - x - 1$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ a au moins une racine dans $[1, 2]$(laissée aux étudiants)
2. Montrer que l'équation $Q(x) = 0$ a au moins une racine dans $[0, 1]$ (laissée aux étudiants)
3. Montrer que l'équation $P(x) = Q(x)$ a au moins une racine dans $]0, 2[$.

Exercice 10 : Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $f(0) = f(2)$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que : $f(c) = f(c + 1)$.
2. Illustrer le résultat par un graphique en représentant une fonction continue quelconque.

Exercice 11 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule jamais.

Montrer que f garde un signe constant pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : Utiliser un raisonnement par l'absurde et le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 12 : Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$ telles que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) < g(x).$$

On considère la fonction $h = g - f$.

1. Justifier que h admet un minimum sur $[0, 1]$ et que ce minimum est strictement positif.
2. En déduire qu'il existe un réel $m > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) + m < g(x).$$

Exercice 13 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$. Cette fonction vérifie :

$$f(1) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad f(-1) = -1 < 0.$$

Cependant, il n'existe aucun $x \in [-1, 1]$ tel que $f(x) = 0$.

Expliquez pourquoi cette situation ne contredit pas le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 14 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Tracer le graphe de f et de f^{-1}.