سلسلة الأعمال الموجهة رقم1

التمرين 1:

1) ليكن $a,b \in \mathbb{R}_+$. برهن المتراجحات التالية:

- $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$ ، $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$
- $a \leq \sqrt{a+b} \leq b$ ، $\sqrt{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$ $(a \leq b)$ (يترك للطالب)

2) من أجل كل عددين كسريين p,q أثبت أن $p+q \in \mathbb{Q}$. (أي أن مجموع عددين كسريين هو عدد كسري)

3) هل مجموع عددين غير كسريين هو عدد غير كسري؟ أعطِ مثالًا مضادًا. (يترك للطالب)

4) برهن أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$، ثم أثبت أن $2-3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ و $1-\frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

التمرين 2:

1. ليكن العدد الكسري $x = 0{,}234234234\ldots$. قارن بين العددين $1000x$ و x ، ثم اكتب x على شكل كسر.
2. اكتب الأعداد التالية على شكل كسر: $a = 0{,}1212$; $b = 0{,}\overleftrightarrow{12}12\ldots$; $c = 78{,}33\overleftrightarrow{456}\ldots$ (يترك للطالب)
3. **التعميم:** أثبت أن الكتابة العشرية لعدد كسري تعادل الكتابة الكسرية.

التمرين 3: من أجل $x,y \in \mathbb{R}$ برهن ما يلي:

1) $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$

2) $1+|yx-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$ (يترك للطالب)

التمرين 4: من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $\alpha \in \mathbb{Z}$ ، $\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ ، $x \in \mathbb{R}$ برهن الخواص التالية:

$E(\beta)+E(-\beta) = -1$ ، $E(\alpha)+E(-\alpha) = 0$ (يترك للطالب) ، $E\left(\frac{x}{2}\right)+E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$ (يترك للطالب)

$E(x+n) = E(x)+n$ ، $E\left(\frac{1}{n}E(xn)\right) = E(x)$ (يترك للطالب)

التمرين 5: لتكن المجموعات التالية:

$[0,1[$ ، $[0,1[\cup]2,3]$ (يترك للطالب) ، $\left\{\frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2\right\}$ ، $\{\cos x, \quad x \in \mathbb{R}\}$

1. تأكد إن كانت المجموعات المعطاة محدودة من الأعلى أو من الأسفل؟ حدد عندئذ مجموعة الحواد العليا أو السفلى.
2. هل تقبل: العنصر الأعظمي، العنصر الأصغري، الحد الأسفل، الحد الأعلى؟

التمرين 6 : بين ما إذا كانت المجموعات التالية تقبل حد أعلى، حد أدنى، عنصر أعظمي، عنصر أصغري:

$\left\{\frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$ ، $\left\{\frac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$ (يترك للطالب) ، $\left\{\sin\frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$

$\left\{2+\frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$ ، $\left\{\frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$ (يترك للطالب) ، $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0, 1-\frac{1}{n^2}\right]$

التمرين 7 : ليكن D جزء غير خال من $\mathbb{R}$. نضع $B=-D$. أثبت أن:

(1 إذا كان D محدود من الأعلى، فإن B محدود من الأسفل ولدينا: $\inf(-D)=-\sup D$

(2 إذا كان D محدود من الأسفل، فإن B محدود من الأعلى ولدينا: $\sup(-D)=-\inf D$

التمرين 8 : (يترك للطالب)

ليكن $A\,,B$ جزأين غير خاليين من $\mathbb{R}_+$ ومحدودين من الأعلى. ولتكن المجموعة: $AB=\{xy\,/\quad x\in A\ ,\ y\in B\}$

أوجد $\sup(AB)$ و $\inf(AB)$ بدلالة $\sup A$ ، $\inf A$ و $\sup B$ ، $\inf B$.

- نفس السؤال للمجموعات: $A\cap B\ \ ,\ \ A\cup B\ \ ,\ \ A+B$

التمرين 9 :

.1 تأكد من صحة المساواة التالية: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (يترك للطالب)

.2 برهن ما يلي: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ (يترك للطالب)

.3 استنتج حصر للمجموعين التاليين:

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{\sqrt{n}}\qquad،\qquad\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

.4 أوجد الجزء الصحيح للعدد $a=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10000}}$.

التمرين 10 : (يترك للطالب)

الجزء الصحيح العلوي لعدد حقيقي x، يعرف كما يلي: $\overline{E}(x)=\min\{k\in\mathbb{Z}\,,\ \ k\geq x\}$ ، ولدينا في هذه الحالة $\overline{E}(x)-1<x\leq\overline{E}(x)$.

.1 أحسب كل من $E\left(-\frac{1}{2}\right)\ ,\ E(\pi)$ و $\overline{E}\left(-\frac{1}{2}\right)\ ,\ \overline{E}(\pi)$.

.2 من أجل كل عدد زوجي $n\in\mathbb{N}$ أحسب $E\left(\frac{n}{2}\right)$ و $\overline{E}\left(\frac{n}{2}\right)$.

.3 من أجل كل عدد $m\in\mathbb{N}$ أحسب $E\left(m+\frac{1}{2}\right)$ و $\overline{E}\left(m+\frac{1}{2}\right)$.

.4 بدراسة حالة عدد زوجي وعدد فردي، استنتج أن

$$E\left(\frac{n}{2}\right)+\overline{E}\left(\frac{n}{2}\right)=n\qquad,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

التمرين 11 : لتكن المجموعة

$$E=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2}\quad,\qquad n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

.1 برهن أن المجموعة E هي اتحاد مجموعتين $E_1\,,E_2$ يطلب تحديدهما.

.2 برهن أن E_2 و E_1 محدودتين، ثم أوجد العنصر الأعظمي و الأصغري، والحد الأعلى والأسفل (إن وجدوا).

.3 استنتج أن E محدودة، ثم أوجد العنصر الأعظمي و الأصغري، والحد الأعلى والأسفل (إن وجدوا).