

Devoir Maison

2025-2026

Le devoir est à remettre le jeudi 18 décembre

Exercice 1.

On suppose que $(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres complexes telle que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ converge pour toute suite $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in c_0 = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}; \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0\}$, où c_0 est muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ définie par

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} |x_k|, \quad x \in c_0.$$

On veut montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$ converge.

1. On définit $T_n x = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, pour $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in c_0$. Montrer que $T_n \in c'_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer $\|T_n\|_{c'_0}$.
2. En déduire (en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus) que $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$ converge.

Exercice 2.

Soit E et F deux espaces de Banach et

$$G = \ell^{\infty}(F) = \left\{ y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F; \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\|_F < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|y\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\|_F.$$

On rappelle que $(G, \|\cdot\|_{\infty})$ est un espace de Banach. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires et continues de E dans F telles que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\|_F < +\infty, \quad \forall x \in E.$$

On note $U : E \rightarrow G$ l'application définie par $U(x) = y$ où $y = (T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer que le graphe de U est fermé.
2. Déduire que U est continue.
3. En déduire que le théorème de Banach-Steinhaus, dans le cas où les deux espaces E et F sont des espaces de Banach, peut être établi comme conséquence du graphe fermé.

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$. Montrer qu'il existe $f \in E'$ telle que

$$\langle f, x_0 \rangle = \|x_0\| \quad \text{et} \quad \|f\|_{E'} = 1.$$

Exercice 4.

Soit W un voisinage de zéro dans un e.v.t E . Montrer qu'il existe un voisinage de zéro $U \subset E$ tel que $U = -U$ et $U + U \subset W$.