Travaux Dirigés n°1

Exercice 1. *(I)* L'objectif est de démontrer l'inégalité de Hölder pour $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{1/q} \tag{H}$$

(a) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

(b) Montrer l'inégalité (H) pour le cas particulier
$$\sum_{j=1}^{n} |a_j| = \sum_{j=1}^{n} |b_j| = 1.$$

(c) En utilisant le changement de variable :
$$a'_j = \frac{|a_j|}{\left(\sum |a_j|^p\right)^{1/p}}, \qquad b'_j = \frac{|b_j|}{\left(\sum |b_j|^q\right)^{1/q}},$$
montrer (H) dans le cas général.

(II) Montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p \right)^{1/p}, \qquad p > 1.$$

Exercice 2. Soit
$$\ell^p = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}.$$
Montrer que ℓ^p est un espace de Banach.

Exercice 3. Montrer que
$$X = C([-1,1])$$
muni de la norme
$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$$
n'est pas un espace de Banach.

Exercice 4. Soit X un espace de Banach.
Montrer que toute série absolument convergente dans X est convergente.

Exercice 5. Donner un exemple d'une suite absolument convergente qui n'est pas convergente.

Indication : Soit $Y \subset \ell^\infty$, Y l'espace des suites ayant un nombre fini de termes non nuls, et soit $(y_n) \in Y$ défini par :

$$y_n = y^{(n)}, \quad y_j^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, & \text{si } j \leq n, \\ 0, & \text{si } j > n. \end{cases}$$

Montrer que (y_n) est absolument convergente mais n'est pas convergente dans ℓ^∞.

Exercice 6. Montrer que Y, défini dans l'exercice précédent, n'est pas fermé dans ℓ^∞.

Fatiha Mesdoui
Université de Jijel — Département de Mathématiques