Université de Jijel
Master : Proba-stat
Département de Mathématiques
Année 2025-2026

Analyse Fonctionnelle

Exercice 1:
Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$T(x, y) = (3x + y, x - 3y, 4y).$$

Montrer que $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, et calculer la norme de T, notée $\|T\|$.

Exercice 2:
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Définir un opérateur T sur ℓ^2 par

$$T(x) = (c_1x_1, c_2x_2, \dots).$$

Montrer que T est borné si et seulement si (c_n) est bornée, et dans ce cas $\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |c_n|$.

Exercice 3:
Soit $x \in \ell^2$, et soit $T(x) = y = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots) \in \ell^2$.
Montrer que T est bien défini et continu. Trouver la norme de T.

Exercice 4:
On munit $X = \mathbb{R}[X]$, l'espace des polynômes, de la norme

$$\|P\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right|.$$

1. Vérifier brièvement que $\|P\|_1$ est une norme sur X.
Soit T l'opérateur de X défini par $T(P) = XP$ pour tout $P \in X$.
2. Démontrer que l'application T est continue et déterminer $\|T\|$.

Dr. MESDOUI.F