

Analyse fonctionnelle TD 3

Exercice 1. Montrer le **théorème de Hahn-Banach généralisé** :

Soit p une application *additive* telle que

$$p(\alpha x) = |\alpha|p(x).$$

Soit $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur Z telle que

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in Z.$$

Alors f admet une extension $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$, forme linéaire, telle que

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Exercice 2.

Montrer que pour tout $x \in X$,

$$\|x\| = \sup_{f \in X', f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Exercice 3.

Soit T^* l'adjoint d'un opérateur linéaire borné T .

Montrer que T^* est aussi linéaire et borné et que

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Exercice 4.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(T^n)^* = (T^*)^n.$$