Analyse fonctionelle TD 4

Exercice 1.

Soit (y_k) une suite réelle telle que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

converge pour toute suite $x = (x_k) \in c_0$, où c_0 désigne l'espace des suites convergeant vers 0.

On définit l'application :

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad x \in c_0,$$

c'est-à-dire

$$T_n : c_0 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $T_n \in c_0'$ (le dual de c_0).
2. Calculer $\|T_n\|$.
3. Montrer que la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$$
est convergente.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels.
Pour $P \in E$, on écrit :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k,$$

et on munit E de la norme :

$$\|P\|_E = \sum_{k=0}^{d} |a_k|.$$

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application linéaire :

$$f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(P) = \frac{P^{(n)}(0)}{(n-1)!}.$$

1. Montrer que $f_n \in E'$ et que $\|f_n\| = n$.
2. Montrer que la suite $(f_n(P))_n$ est convergente pour tout $P \in E$.
3. L'espace E est-il un espace de Banach ?