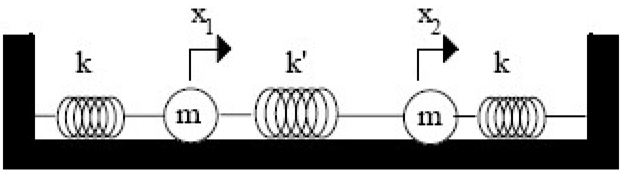
corrigé Travaux dirigés N°6

Exercice 01



1. Le lagrangien du système :

L'énergie cinétique : $\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2}$

L'énergie potentielle : $\boldsymbol{E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2}$

Le Lagrangien : $\boldsymbol{L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2}$

2. Les équations différentielles de ce système :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 = k'x_2 \\ m\ddot{x}_2 + (k + k')x_2 = k'x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{(k+k')}{m}x_1 = \frac{k'}{m}x_2 \\ \ddot{x}_2 + \frac{(k+k')}{m}x_2 = \frac{k'}{m}x_1 \end{cases} \quad \textbf{(1)} \quad \text{de la forme :} \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = ax_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = ax_1 \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

3. Les expressions de $\boldsymbol{\omega_0^2}$ et **a** le coefficient de couplage :

$$\omega_0^2 = \frac{(k + k')}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(k + k')}{m}}$$

$$a = \frac{k'}{m}$$

4. Les équations du mouvement :

Le système est à 2 degrés de liberté libre non amorti, les solutions sont donc de la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\Omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2\cos(\Omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

5. Les pulsations propres du système :

En remplaçant dans le système d´équations (2), on trouve :

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \Omega^2)A_1 - aA_2 = 0 \\ -aA_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

hafsaoui@univ-jijel.dz

$$\boldsymbol{\Delta(\Omega) = \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 - a^2 = 0 \;\Rightarrow\; \qquad \Omega^4 - 2\omega_0^2\Omega^2 - a^2 + \omega_0^4 = 0}$$

$$\begin{cases} \Omega_1^2 = \dfrac{2\omega_0^2 - \sqrt{\left(2\omega_0^2\right)^2 + 4\left(a^2 - \omega_0^4\right)}}{2} \\ \Omega_2^2 = \dfrac{2\omega_0^2 + \sqrt{\left(2\omega_0^2\right)^2 + 4\left(a^2 - \omega_0^4\right)}}{2} \end{cases}$$

6. Les valeurs numériques des périodes propres :

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{1}\right)^2 = 4\pi^2 \qquad\qquad a^2 = (\pi^2)^2 = \pi^4$$

$$\begin{cases} \Omega_1^2 = \dfrac{8\pi^2 - \sqrt{(8\pi^2)^2 + 4(\pi^4 - 16\pi^4)}}{2} = 3\pi^2 \\ \Omega_2^2 = \dfrac{8\pi^2 + \sqrt{(8\pi^2)^2 + 4(\pi^4 - 16\pi^4)}}{2} = 5\pi^2 \end{cases}$$

$$\Omega_1 = \sqrt{3}\pi \qquad \Omega_2 = \sqrt{5}\pi$$

7. Les solutions :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_{21}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_{22}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

- Les modes propres :
  - Si $A_{12} = A_{22} = 0$ **:** Le système oscille dans le **1^er mode** $\boldsymbol{\Omega = \Omega_1}$**.**

$$\begin{cases} x_{11}(t) = A_{11}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) \\ x_{21}(t) = A_{21}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) \end{cases}$$

Avec : $A_{11} = \left[\frac{a}{\omega_0^2 - \Omega_1^2}\right] A_{21} \qquad A_{21} = \left[\frac{\omega_0^2 - \Omega_1^2}{a}\right] A_{11} = \left[\frac{4\pi^2 - 3\pi^2}{\pi^2}\right] A_{11} = A_{11}$

$$\begin{cases} x_{11}(t) = A_{11}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) \\ x_{21}(t) = A_{11}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) \end{cases}$$

  - Si $A_{11} = A_{21} = 0$ **:** Le système oscille dans le **2^eme mode** $\boldsymbol{\Omega = \Omega_2}$**.**

$$\begin{cases} x_{12}(t) = A_{12}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \\ x_{22}(t) = A_{22}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \qquad \textbf{(13)}$$

Avec : $A_{12} = \left[\frac{a}{\Omega_2^2 - \omega_0^2}\right] A_{22} \qquad A_{22} = \left[\frac{\Omega_2^2 - \omega_0^2}{a}\right] A_{12} = \left[\frac{5\pi^2 - 4\pi^2}{\pi^2}\right] A_{12} = A_{12}$

$$\begin{cases} x_{12}(t) = A_{12}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \\ x_{22}(t) = A_{12}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

La solution générale est la combinaison linéaire des deux solutions :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\cos(\Omega_1 t+\varphi_1) + A_{12}\cos(\Omega_2 t+\varphi_2) \\ x_2(t) = A_{11}\cos(\Omega_1 t+\varphi_1) + A_{12}\cos(\Omega_2 t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$\dot{x}_1(t) = -A_{11}\,\Omega_1\sin(\Omega_1 t+\varphi_1) - A_{12}\Omega_2\sin(\Omega_2 t+\varphi_2)$$

$$\dot{x}_2(t) = -A_{11}\,\Omega_1\sin(\Omega_1 t+\varphi_1) - A_{12}\,\Omega_2\sin(\Omega_2 t+\varphi_2)$$

Les constantes A_{11}, A_{12}, φ_1 et φ_2 sont déterminées à partir des conditions initiales suivantes :

$x_1(0) = X_0 \quad x_2(0) = X_0 \qquad \dot{x}_1(0) = 0 \quad \dot{x}_2(0) = 0$.

$$\begin{cases} x_1(0) = A_{11}\cos(\varphi_1) + A_{12}\cos(\varphi_2) = X_0 \\ x_2(0) = A_{11}\cos(\varphi_1) + A_{12}\cos(\varphi_2) = X_0 \end{cases}$$

$$\dot{x}_1(0) = -A_{11}\,\Omega_1\sin(\varphi_1) - A_{12}\Omega_2\sin(\varphi_2) = 0$$

$$\dot{x}_2(0) = -A_{11}\,\Omega_1\sin(\varphi_1) - A_{12}\,\Omega_2\sin(\varphi_2) = 0$$

$A_{11} = A_{12} = \frac{X_0}{2} \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{X_0}{2}\cos\left(\sqrt{3}\pi t\right) + \dfrac{X_0}{2}\cos\left(\sqrt{5}\pi t\right) \\ x_2(t) = \dfrac{X_0}{2}\cos\left(\sqrt{3}\pi t\right) + \dfrac{X_0}{2}\cos\left(\sqrt{5}\pi t\right) \end{cases}$$

8. En ajoutant un amortisseur en parallèle avec chaque ressort k :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\delta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = a\,x_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = a\,x_1 \end{cases}$$

Nous posons $q_1(t) = A_1\,e^{rt} \quad q_2(t) = A_2\,e^{rt}$

En remplaçant dans le système **(16)**, nous trouvons :

$$\begin{cases} \left(r^2 + 2\delta r + \omega_0^2\right)A_1 - a\,A_2 = 0 \\ -a\,A_1 + \left(r^2 + 2\delta r + \omega_0^2\right)A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(r^2 + 2\delta r + \omega_0^2\right)^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = \pm a$$

- 1er mode propre : $\boldsymbol{r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = a} \qquad \boldsymbol{r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 - a = 0}$

$\boldsymbol{\Delta' = 4\pi^2 - (4\pi^2 - \pi^2) = \pi^2}$

➢ $\boldsymbol{\Delta' > 0}$ **:** Deux racines réelles $\boldsymbol{r_{1,2} = -2\pi \pm \pi \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -\pi \\ r_1 = -3\pi \end{cases}}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{11}(t) = A_{11}\, e^{-\pi t} + B_{11}\, e^{-3\pi t}} \\ \boldsymbol{x_{21}(t) = C_{21}\, e^{-\pi t} + D_{21}\, e^{-3\pi t}} \end{cases}$$

- 2eme mode propre : $\boldsymbol{r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = -a} \qquad \boldsymbol{r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 + a = 0}$

$\boldsymbol{\Delta' = \delta^2 - \left(\omega_0^2 + a\right) = 4\pi^2 - (4\pi^2 + \pi^2) = -\pi^2 < 0}$ ⇒deux racines complexes :

$\boldsymbol{r_{1,2} = -2\pi \pm i\pi}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{12}(t) = A_2\, e^{-2\pi t} \cos[\pi\, t + \varphi_{21}]} \\ \boldsymbol{x_{22}(t) = B_2\, e^{-2\pi t} \cos[2\pi\, t + \varphi_{22}]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{11}(t) = A_{11}\, e^{-\pi t} + B_{11}\, e^{-3\pi t} + A_2\, e^{-2\pi t} \cos[\pi\, t + \varphi_{21}]} \\ \boldsymbol{x_{21}(t) = C_{21}\, e^{-\pi t} + D_{21}\, e^{-3\pi t} + B_2\, e^{-2\pi t} \cos[2\pi\, t + \varphi_{22}]} \end{cases}$$

9. $\vec{F}(t) = F_0 cos\, \Omega t$

$$\begin{cases} \boldsymbol{m\ddot{x}_1 + \alpha_1\dot{x}_1 + (k + k')x_1 - kx_2 = F = F_0 \cos \Omega t} \\ \boldsymbol{m\ddot{x}_2 + \alpha_2\dot{x}_2 + (k + k')x_2 - kx_1 = 0} \end{cases}$$

La solution générale du système d´équations (2) est la somme de la solution du système homogène et de la solution particulière. Cependant, la solution du système homogène tend vers zéro avec le temps, à cause de l´amortissement. Ainsi, au régime permanent, la solution devient égale à la solution particulière (solution permanente) qui s´écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{x_1(t) = X_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)}$$

$$\boldsymbol{x_2(t) = X_2 \cos(\Omega t + \varphi_2)}$$

$\boldsymbol{X_1, X_2}$, $\boldsymbol{\varphi_1}$ et $\boldsymbol{\varphi_2}$ sont les amplitudes et les phases initiales, qui peuvent être calculées en utilisant la méthode des nombres complexes