

Chapitre 1

1. Définitions

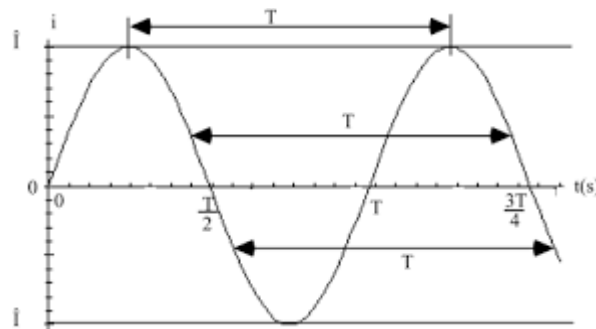
Un phénomène est dit périodique dans le temps, s'il se répète identiquement à lui-même à des intervalles de temps successifs égaux. La durée de temps est notée T et généralement notée en second (sec).

La fréquence représente le nombre de période par unité de temps ($f = \frac{1}{T}$), l'unité de : ($f = \frac{1}{s} = s^{-1} = Hz$).

2. Fonction périodiques

La fonction $F(t)$ est une fonction périodique de période T alors :

$$F(t) = F(t + T) = F(t + 2T) = \dots = F(t + nT)$$



La valeur moyenne d'une fonction périodique est donnée par la formule suivante

$$\bar{F}_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

La valeur efficace d'une fonction périodique est donnée par la formule suivante

$$\bar{F}_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T F^2(t) dt}$$

3. Mouvement harmonique

3.1. Définitions

Le mouvement harmonique est un phénomène périodique dont la variation écrite par une fonction sinusoïdale $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ avec

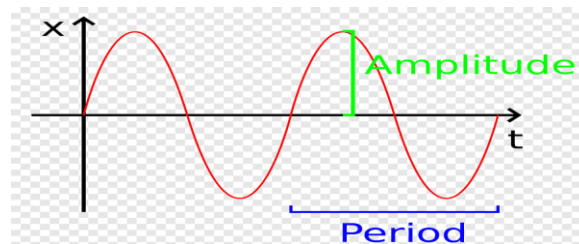
x : coordonnée généralisée

a : amplitude, valeur maximale de x

ω : pulsation ou vitesse angulaire

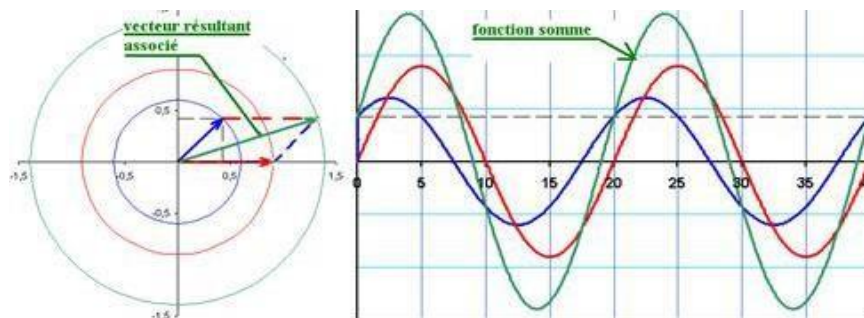
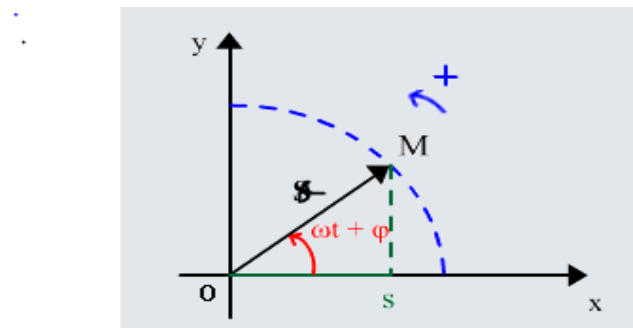
φ : phase initiale à $t = t_0$

x est périodique de $2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$



3.2. Représentation de Fresnel

Le mouvement harmonique peut être considéré comme le mouvement de la projection sur un diamètre d'un point M ayant un mouvement circulaire ω sur un cercle de rayon a



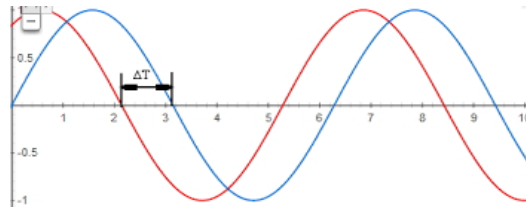
3.3. Déphasage est retard

Soit deux mouvements harmoniques de même période (pulsation)

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ et } x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

La différence de phase ou déphasage est donnée par $\Delta\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$

Si $\varphi_2 > \varphi_1$ on dit que x_1 est en retard par rapport à x_2 de $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$



2. Composition de mouvement harmonique

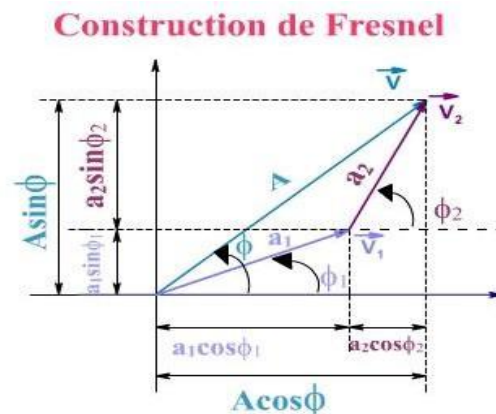
Dans cette section, nous considérons un mouvement de même période et de même direction. Soit $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Le mouvement résultant $x = x_1 + x_2$ peut être déterminé par deux méthodes.

a. Méthode de Fresnel

À partir de l'image de construction, on peut écrire

$$\tan \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$$

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V})^2 = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)^2 = (\vec{V}_1)^2 + (\vec{V}_2)^2 + 2 \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \Rightarrow a^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$



b. méthode trigonométrique

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= a_1 \cos \omega t \cos \varphi_1 - a_1 \sin \omega t \sin \varphi_1 + a_2 \cos \omega t \cos \varphi_2 - a_2 \sin \omega t \sin \varphi_2 \\ &= \cos \omega t [a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2] - \sin \omega t [a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2] \end{aligned}$$

$$\text{alors } x = a \cos(\omega t + \varphi) = a \cos \omega t \cos \varphi - a \sin \omega t \sin \varphi$$

On aura

$$\begin{cases} a \cos \varphi = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dots \dots \dots (1) \\ a \sin \varphi = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$$

$$\text{Et } (1)^2 + (2)^2 = a^2$$

3. Décomposition des fonctions périodiques en série de fourrier

Toutes fonctions périodiques $F(t)$ de période T peut être développée en série de fonctions sinusoïdales $F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

$$\text{Ou } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$\text{Et } \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt : \text{valeur moyenne de } F(t).$$

$$\checkmark \text{ Si } F(t) \text{ est pair} \Rightarrow b_n = 0$$

$$\checkmark \text{ Si } F(t) \text{ est impair} \Rightarrow a_n = 0$$

Chapitre 3

Oscillations libres amorties a 1 ddl

1. force et frottement

Dans la réalité, les systèmes en mouvement sont soumis à des forces de frottement qui tendent à amortir le mouvement. On a deux catégories de force de frottement :

- Force de frottement solide : elles sont constantes.
- Force de frottement visqueuse : liées à la vitesse.

Pour les petites oscillations, elles sont inversement proportionnelle à la vitesse : $F_v = -\alpha v$ avec α présente le coefficient d'amortissement.

2. équation de mouvement

Les oscillations libres amorties à 1ddl sont régies par des équations différentielles de la forme

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

λ facteur d'amortissement $\lambda = f(\alpha)$.

ω_0 pulsation propre du système.

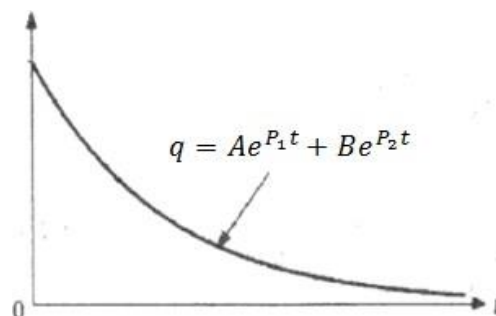
La solution de cette équation dépend du signe de Δ de l'équation caractéristique suivante $P^2 + 2\lambda P + \omega_0^2 = 0$

- Si $\Delta' > 0 \Rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_0$

$$P_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'}$$

On a deux racines réelles {et $P_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'}$. La solution est de la forme

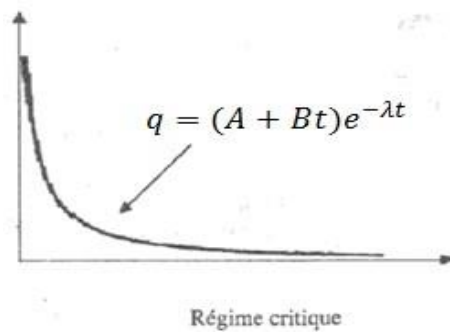
$$q = Ae^{P_1 t} + Be^{P_2 t}$$



Régime aperiodique ou fortement amorti

- Si $\Delta' = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_0$

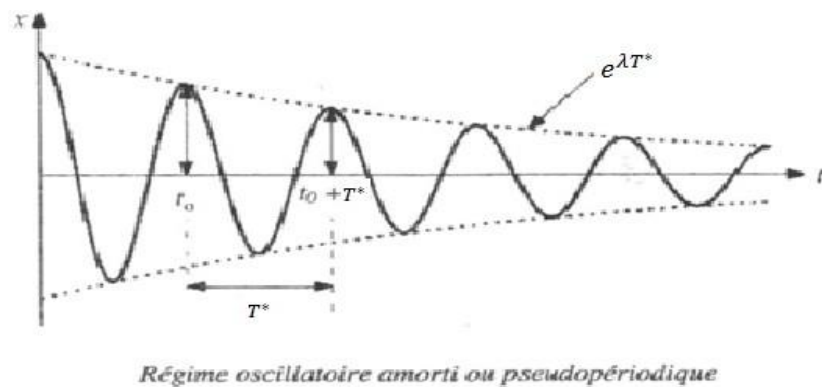
On a une racine double et réel $P = \lambda$. La solution est de la forme $q = (A + Bt)e^{-\lambda t}$



- Si $\Delta' < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_0$ (amortissement faible)

On a deux racines complexes $\begin{cases} P_1 = -\lambda - j\sqrt{\Delta'} \\ P_2 = -\lambda + j\sqrt{\Delta'} \end{cases}$ et . La solution est de la forme

$q = Ce^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$ avec C et φ sont des constantes



3. grandeurs caractéristiques

a. décrétement logarithmique

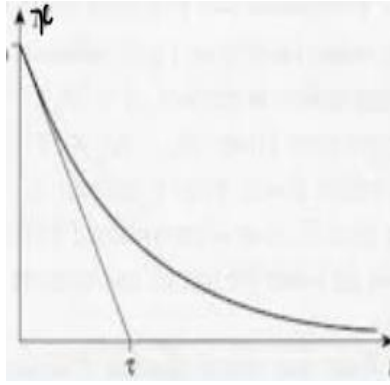
Pour le régime pseudo périodique, on le définit comme le logarithme du rapport de amplitudes successives :

$$\delta = \log \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda(t+T^*)}} = e^{\lambda T^*}$$

b. constante de temps

C'est le temps nécessaire pour que l'amplitude soit réduite par $\frac{1}{e}$

$$\frac{Ce^{-\lambda(t+\tau)}}{Ce^{-\lambda t}} = \frac{1}{e} \Rightarrow e^{-\lambda \tau} = e^{-1} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}$$



4. exemple

a. système masse-ressort-amortisseur

- état d'équilibre

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_{\text{ressort}} = \vec{0} \Rightarrow mg - kx_0 = 0$$

- Etat de mouvement

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_{\text{ressort}} + \vec{F}_{\text{amortisseur}} = m\vec{a}$$

Par projection sur l'axe (xx'), on a :

$$mg - k(x_0 + x) - \alpha \dot{x} = m\ddot{x}$$

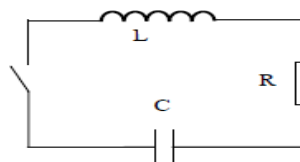
$$-kx - \alpha \dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Avec

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

b. circuit RLC



Loi de Kirchhoff

$$\sum U_i = 0 \Rightarrow U_C + U_L + U_R = 0$$

$$\frac{1}{C} \int i \, dt + L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad \dot{q} = \frac{di}{dt}, \quad \int i \, dt = q$$

Donc

$$\frac{1}{C} q + L \dot{q} + Rq = 0$$

$$\dot{q} + \frac{R}{L} q + \frac{1}{LC} q = 0$$

Avec

$$\lambda = \frac{R}{2L} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

5. Analogie électromécanique

Translation	Rotation	Electricité
Déplacement x	Angle θ	Charge q
Vitesse $\dot{x}$	Vitesse angulaire $\dot{\theta}$	Courant $i = \dot{q}$
Masse m	Moment d'inertie J	Bobine L
Coeff. D'amorti α	Coeff. Moment. D'amorti α	Résistance R
Raideur k	Constante de tension C	Inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
Force $\vec{F}$	Moment $\vec{\mu}$	Tension U
$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$	$J\ddot{\theta} + \mu(\alpha)\dot{\theta} + C\theta = 0$	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$

6. Equation de LaGrange

Pour un système libre amortie, l'équation de LaGrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq} \right) - \frac{dL}{dq} = - \frac{dD}{dq}$$

q coordonnée.

D fonction ou énergie de dissipation, pour une amortisseur de constante α : $D = \frac{1}{2} \alpha v^2$

pour une résistance $D = \frac{1}{2} Ri^2$

Chapitre 6

Système a plusieurs degrés de liberté

Les systèmes a plusieurs d d l sont des systèmes décrit par plusieurs coordonnées généralise. Le nombre de cas coordonnées correspond au nombre de d d l. Ces systèmes sont la réunion de sous-systèmes de 1 d d l dont les mouvements influent les uns sur les autres on dit qu'ils sont couplés.

I Système à 2 d d l

Equation de mouvement

L'équation du mouvement est donnée par l'expression suivante :

$$\ddot{q}_1 + 2\lambda_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = a_1 q_2 + b_1 \dot{q}_2 + c_1 \ddot{q}_2$$

$$\ddot{q}_2 + 2\lambda_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = a_2 q_1 + b_2 \dot{q}_1 + c_2 \ddot{q}_1$$

Avec

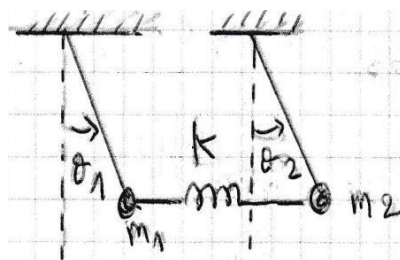
q_1 et q_2 dénote les coordonnées généralisées

λ_1 et λ_2 présentent les coefficient d'amortissement des systèmes découplés.

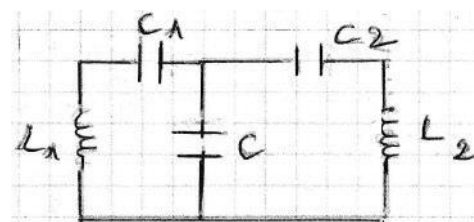
ω_1 et ω_2 pulsation propre des systèmes découplés.

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ coefficient de couplage.

- Si $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ couplage elastique

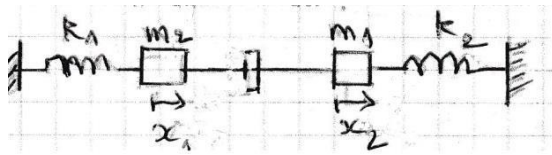


Système

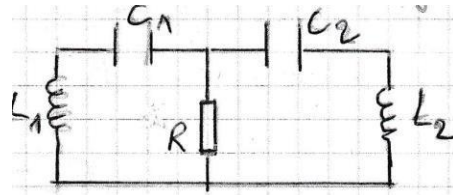


Circuit électrique équivalent

- Si $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ couplage visqueuse

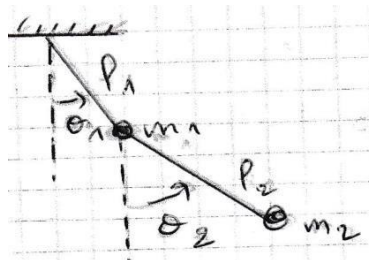


Système

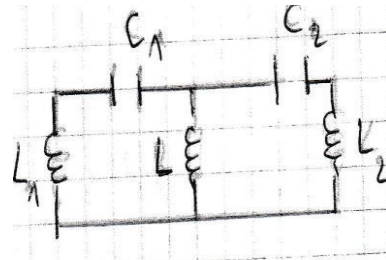


Circuit électrique équivalent

- Si $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0 \Rightarrow$ couplage par inertie



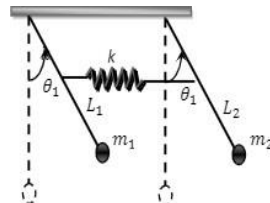
Système



Circuit électrique équivalent

II Système libre non amortie avec couplage élastique

L'équation du mouvement est donnée par la formule suivante



$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = a_1 x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = a_2 x_1 \end{cases}$$

Pour résoudre le système, on écrit les solutions sous la forme suivantes

$$x_1 = A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) \xrightarrow{R.C} \bar{x}_1 = A_1 e^{(\Omega t + \varphi_1)} = A_1 e^{\Omega t} \text{ avec } A_1 = A_1 e^{\varphi_1}$$

et

$$x_2 = A_2 \cos(\Omega t + \varphi_2) \xrightarrow{R.C} \bar{x}_2 = A_2 e^{(\Omega t + \varphi_2)} = A_2 e^{\Omega t} \text{ avec } A_2 = A_2 e^{\varphi_2}$$

Où Ω dénote la pulsation propre du système couplé $\Omega = f(\omega_1, \omega_2)$.

On dérive $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ et on remplace dans l'équation du système, on obtient

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2)A_1 - a_1A_2 = 0 \\ -a_2A_1 + (\omega_2^2 - \Omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant

$$\det \begin{vmatrix} (\omega_1^2 - \Omega^2) & -a_1 \\ -a_2 & (\omega_2^2 - \Omega^2) \end{vmatrix} = (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) - a_1a_2$$

On a deux cas

- Si $\det \neq 0$, par la methode de cramer rao, on a

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -a_1 \\ 0 & (\omega_2^2 - \Omega^2) \end{vmatrix}}{\det} = \frac{0}{\det} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

et

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} (\omega_1^2 - \Omega^2) & 0 \\ -a_2 & 0 \end{vmatrix}}{\det} = \frac{0}{\det} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

Donc : système a l'équilibre, pas de vibration.

- $\det = 0$

On a

$$\begin{cases} A_1 = \infty \\ A_2 = \infty \end{cases} \Rightarrow \text{Cas d'indétermination, il faut résoudre l'équation } \det = 0 \text{ pour voir les cas}$$

de vibration.

$$\begin{aligned} \det = 0 &\Rightarrow (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) - a_1a_2 = 0 \\ &\Rightarrow \Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\Omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2 - a_1a_2 = 0 \end{aligned}$$

Cette équation est appelée équation aux pulsations propres.