TD N#03 : Les Files d'Attente

Exercice 01

Pour chaque situation ci-dessous, déterminer le type de file d'attente le plus approprié :

- Une station de lavage automatique où un seul véhicule peut être lavé à la fois ; l'arrivée des voitures est aléatoire et il n'y a qu'un espace pour faire la queue.
- Un cabinet médical avec 3 médecins mais une salle d'attente de seulement 10 places.
- Une borne de retrait automatique de billets, sans limite de clients qui peuvent attendre debout.
- Une file d'embarquement dans un bus, qui peut physiquement contenir 30 personnes maximum.
- Un supermarché avec 4 caisses indépendantes exécutant des paiements à des vitesses différentes (μ différentes).
- Un escalier mécanique où les arrivées des personnes sont aléatoires mais où la vitesse du service n'est pas exponentielle (vitesse constante).
- Un poste de contrôle de sécurité où le flux de clients est régulé par des barrières physiques et où la file ne peut contenir que 50 personnes.
- Un service de restauration avec 2 serveurs travaillant en parallèle mais où le temps de service dépend du type de commande (service non exponentiel).

Exercice 02

- Un centre d'appel reçoit en moyenne 18 appels par heure.

1. Modéliser le flux des appels par **un processus de Poisson**.
2. Calculer la probabilité d'obtenir 3 appels dans un intervalle de 10 minutes.
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins 5 appels dans une période de 15 minutes.
4. Déterminer l'intervalle moyen entre deux appels.
5. Que se passe-t-il si l'intensité double pendant une heure de forte affluence ?

- Une machine subit des pannes successives. On modélise le temps entre deux pannes par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.1$ panne/heure.

1. Calculer la probabilité que la machine fonctionne plus de 12 heures sans panne.
2. Calculer la probabilité qu'aucune panne n'arrive dans les 3 prochaines heures.
3. Trouver l'espérance du temps avant la prochaine panne.
4. Calculer la probabilité que le temps entre deux pannes soit compris entre 2 et 7 heures.
5. Sachant qu'aucune panne n'a eu lieu pendant les 6 premières heures, calculer la probabilité qu'aucune panne n'arrive dans les 4 heures suivantes.
6. On s'intéresse au nombre de pannes dans un intervalle de 15 heures. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux pannes dans cet intervalle.

Exercice 03

- Une station de paiement automatique reçoit des clients de manière aléatoire. On a mesuré sur le terrain les informations suivantes :
    - ***Arrivées*** : en moyenne, 54 clients arrivent en 90 minutes.
    - ***Service*** : un client met en moyenne 50 secondes pour effectuer son paiement.

1. Déduire les valeurs de λ et μ en unités par minute ou par heure.
2. Vérifier la condition de stabilité du système.

3. Calculer la probabilité d'avoir exactement 35 clients dans le système.
4. Calculer la probabilité qu'un client arrivant trouve le système vide.
5. Calculer les grandeurs suivantes : L, Lq, Ls, W, Wq, Ws.
6. Interpréter les résultats obtenus : Le temps d'attente est-il acceptable pour les clients ? L'occupation du serveur semble-t-elle raisonnable ?
7. Proposer une solution opérationnelle pour réduire l'attente Wq sans modifier la durée moyenne de service (donc sans changer μ).
8. Déduire le pourcentage de temps où la station est occupée.
9. Estimer la probabilité qu'un client doive attendre avant de commencer son paiement.

- Une seconde borne identique est installée.

10. Expliquer qualitativement ce qui change.
11. Dire si l'attente devrait diminuer fortement ou modérément.
12. Identifier de nouveaux paramètres nécessaires.

- Supposons maintenant que la demande augmente à 60 clients en 90 minutes :

13. Recalculer λ,
14. Discuter l'impact sur la stabilité et l'attente.

Exercice 04

- Un centre de don de sang accueille régulièrement des donneurs sur ses différentes matinées d'ouverture. Lors d'une matinée de 4 heures, ce centre a reçu 125 donneurs. Trois infirmiers étaient présents pour assurer le service, chacun pouvant traiter en moyenne 18 donneurs par heure.

1. Vérifier que le système est stable.
2. Calculer le taux d'occupation moyen par serveur.
3. Interpréter les résultats : même si le système est stable globalement, un serveur peut-il être fortement sollicité ?
4. Calculer la probabilité qu'un donneur doive attendre, c'est-à-dire que les 3 infirmiers soient occupés à son arrivée.
5. Calculer la probabilité que le centre soit vide (aucun donneur dans le système).
6. Calculer : L, Lq, W, Wq.
7. Comparer qualitativement ces probabilités à un système M/M/1 avec les mêmes λ et μ.

- Si un quatrième infirmier est ajouté (M/M/4) :

8. Quel est l'impact attendu sur Wq et Lq ?
9. Comment évolue la probabilité qu'un donneur doive attendre ?

- Si le flux de donneurs augmente à 150 pour la même durée :

10. Recalculer le taux d'occupation et la probabilité qu'un donneur doive attendre.
11. Le système reste-t-il stable et confortable pour les donneurs ?
12. Proposer une mesure opérationnelle pour réduire l'attente Wq sans modifier la durée de service.

Exercice 05

Une entreprise exploite deux services où les clients arrivent pour être servis :

- Service A : un guichet unique avec capacité maximale K = 5 clients.
- Service B : un guichet principal avec 3 serveurs en parallèle et capacité maximale K = 8 clients.

Durant une période d'observation de 4 heures, on a collecté pour le Service A les données suivantes :

Temps inter-arrivées (min)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Fréquence	18	32	41	21	8

Durée de service (min)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
Fréquence	15	37	36	22	10

Pour le Service B, sur la même période, 150 clients sont arrivés et chaque serveur a pu traiter en moyenne 20 clients/heure.

1. Vérifier la stabilité des deux services et interpréter le résultat.
2. Déterminer la proportion du flux réellement pris en charge pour chaque service.
3. Déterminer la probabilité que le système soit vide pour chaque service.
4. Calculer le nombre moyen de clients dans le système et dans la file d'attente pour les deux services.
5. Calculer le temps moyen d'attente dans la file et le temps total dans le système pour les deux services.
6. Comparer les deux services : effet du nombre de serveurs et de la capacité finie sur Wq, Lq et les pertes.
7. Identifier pour lequel des deux services la congestion apparaît plus vite et expliquer pourquoi.
8. Décrire l'effet d'ajouter un serveur supplémentaire au Service B sur Wq et sur la probabilité de perte.
9. Comment évoluent Wq et Lq si le flux d'arrivée λ augmente de 20 % ?
10. Pourquoi le Service B absorbe mieux les fluctuations d'arrivée que le Service A ?
11. Comment la capacité K modifie la sensibilité du système au flux ?
12. Proposer des mesures opérationnelles pour réduire les pertes et/ou réduire le temps d'attente sans changer le temps moyen de service.

Rappel

Loi / Concept	Définition / Formule	Remarques / Utilisation
Loi exponentielle (temps entre événements)	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$	λ = taux d'événements par unité de temps (clients/h, pannes/h…)
Fonction de répartition	$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$	Probabilité que l'événement se produise avant t
Fonction de survie	$S(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$	Probabilité que l'événement n'ait pas eu lieu avant t
Espérance	$E[T] = 1/\lambda$	Temps moyen entre deux événements
Variance	$Var[T] = 1/\lambda^2$	
Propriété sans mémoire	$P(T > s + t \mid T > s) = P(T > t)$	Très utile pour modéliser les temps d'attente dans les files d'attente
Loi de Poisson (nombre d'événements dans un intervalle)	$P(N(t) = k) = \dfrac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \ \ k = 0,1,2,\ldots$	λ = taux moyen d'événements par unité de temps
Espérance et variance	$E[T] = Var[T] = \lambda t$	Nombre moyen d'événements attendus sur l'intervalle t
Lien Exponentielle – Poisson	Si $T \sim Exp(\lambda)$ alors $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$	Le nombre d'événements dans un intervalle t suit la loi de Poisson