Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département d'informatique

Année universitaire 2025-2026

Analyse 1

par
Yasmina Daikh

Chapitre 5

Fonctions dérivables

5.1 Notion de dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

Définition 5.1.1.

- *La fonction f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.*
  Cette limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- *La fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout point x_0 de I.*
  Dans ce cas, la fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur I, notée f' ou $\dfrac{df}{dx}$.

Remarque. *En posant $h = x - x_0$, on obtient la formulation équivalente :*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Exemples.

1. *Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
   Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{(2x^2-3x+1)-(2x_0^2-3x_0+1)}{x-x_0} \\
&= \frac{2(x^2-x_0^2)-3(x-x_0)}{x-x_0} \\
&= \frac{2(x-x_0)(x+x_0)-3(x-x_0)}{x-x_0} \\
&= 2(x+x_0)-3
\end{aligned}$$

Quand $x \to x_0$, on obtient :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} [2(x + x_0) - 3] = 2(2x_0) - 3 = 4x_0 - 3$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x - 3$.

2. *Soit $f(x) = \cos x$. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
   Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, calculons le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$$

En utilisant l'identité trigonométrique $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= \frac{-2 \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\ &= -\sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \end{aligned}$$

Quand $x \to x_0$, on a :

$\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \to \sin x_0$

$\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \to 1$ *(limite fondamentale)*

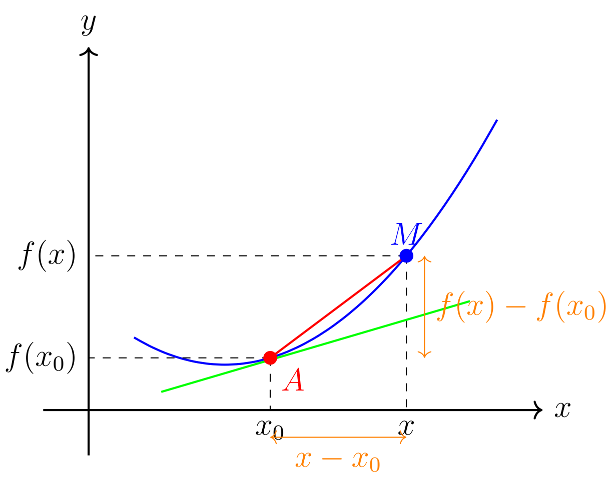
Donc :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left[-\sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \right] = -\sin x_0 \cdot 1 = -\sin x_0$$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\sin x$.

- **Interprétation géométrique de la dérivée**

La dérivée d'une fonction en un point possède une interprétation géométrique fondamentale. Soit f une fonction dérivable en x_0 et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.



- **Explication du schéma :**

— **Point fixe A** : $A(x_0, f(x_0))$ est le point où l'on étudie la dérivée

— **Point mobile M** : $M(x, f(x))$ est un point variable sur la courbe

— **Droite tangente** : Lorsque $x \to x_0$, le point M se rapproche de A et la droite (AM) tend vers la tangente à la courbe en A

— **Equation de la tangente** : Si f est dérivable en x_0, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Cette équation montre que :

— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 est $f'(x_0)$

— La tangente passe par le point $(x_0, f(x_0))$.

Proposition 5.1.1. *(Caractérisation de la dérivabilité). La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que :*

- $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$
- $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$

Démonstration. **(⇒) :** Supposons f dérivable en x_0. Alors par définition :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Posons $\ell = f'(x_0)$ et définissons la fonction ε par :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \quad \text{pour } x \neq x_0, \quad \text{et} \quad \varepsilon(x_0) = 0$$

Alors on a bien :

$$f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

et par construction :

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \right) = f'(x_0) - \ell = 0$$

(⇐) : Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et ε avec $\varepsilon(x) \to 0$ telle que :

$$f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Alors pour $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell + \varepsilon(x)$$

et donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell + \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = \ell$$

Ce qui prouve que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \ell$. □

Définition 5.1.2.

— *La dérivée à droite de f en x_0 est définie par :*

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si cette limite existe et est finie.

— *La dérivée à gauche de f en x_0 est définie par :*

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si cette limite existe et est finie.

Proposition 5.1.2. *Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si :*

- *f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x_0 et*
- *$f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$*

Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Proposition 5.1.3.

i) Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

ii) Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Démonstration.

i) Supposons que f est dérivable en x_0. Alors par définition :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Considérons la différence $f(x) - f(x_0)$ que nous pouvons réécrire comme :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Lorsque $x \to x_0$, on a :

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)$ (par dérivabilité)

$x - x_0 \to 0$

Donc par produit des limites :

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Ce qui équivaut à :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ainsi, f est continue en x_0.

ii) Si f est dérivable sur I, alors f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. D'après le premier point, f est donc continue en tout point $x_0 \in I$, ce qui signifie que f est continue sur I. □

Remarque. *La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. Par exemple, la fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. En effet, étudions la dérivabilité en 0 en calculant la limite du taux d'accroissement :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Calculons les limites à gauche et à droite :

— ***Limite à droite :*** *Pour $x > 0$, $|x| = x$, donc :*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

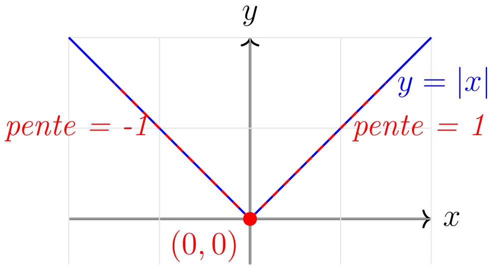
— ***Limite à gauche :*** *Pour $x < 0$, $|x| = -x$, donc :*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Les limites à gauche et à droite sont différentes :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$$

Donc la limite $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas.
Ainsi, f n'est pas dérivable en 0.



*La fonction valeur absolue présente un **point anguleux** en 0 :*

— *À droite de 0, la courbe a une pente de $+1$*

— *À gauche de 0, la courbe a une pente de -1*

— *Il n'y a pas de tangente unique en 0*

5.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 5.2.1. *Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

1. ***Combinaison linéaire :*** $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$
2. ***Produit :*** $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. ***Inverse :*** *Si $f(x_0) \neq 0$, alors* $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{\big(f(x_0)\big)^2}$

4. ***Quotient :*** *Si* $g(x_0) \neq 0$*, alors* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$

Démonstration.

1. Combinaison linéaire :

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \mu \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)
\end{aligned}$$

2. Produit :

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}$$

   car g est continue en x_0 (dérivable implique continu).

3. Inverse

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{(x - x_0)f(x)f(x_0)} \\
&= -\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= -\frac{f'(x_0)}{\big(f(x_0)\big)^2}
\end{aligned}$$

   car f est continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$.

4. Quotient : en écrivant $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$ et en utilisant les règles du produit et de l'inverse :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(-\frac{g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2} \right) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}
\end{aligned}$$

□

Exemples.

1. *Dérivée de* $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$$f'(x) = 3(2x) - 2(1) + 0 = 6x - 2$$

2. *Dérivée de* $f(x) = x \sin x$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$

3. *Dérivée de* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Proposition 5.2.2. *(Dérivée d'une fonction composée). Soient* $f : I \to J$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que :*

- f *est dérivable en* $x_0 \in I$
- g *est dérivable en* $f(x_0) \in J$

Alors $g \circ f$ *est dérivable en* x_0 *et :*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Démonstration. Soient f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. On a :

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x0}$$

Quand $x \to x_0$, on a $f(x) \to f(x_0)$ par continuité de f en x_0. Donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = g'(f(x_0))$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Par produit des limites, on obtient :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

□

Exemples.

1. *Soit* $\psi(x) = \cos\left(e^{x^2} \cdot \ln(2x+1)\right)$

   Cette fonction est dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ *car :*

   - $u(x) = e^{x^2}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$
   - $v(x) = \ln(2x+1)$ *est dérivable sur* $]-\frac{1}{2}, +\infty[$
   - $w(t) = \cos(t)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$

   Par la Proposition 5.2.2 :

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= -\sin\left(e^{x^2} \cdot \ln(2x+1)\right) \cdot \frac{d}{dx}\left[e^{x^2} \cdot \ln(2x+1)\right] \\ &= -\sin\left(e^{x^2} \cdot \ln(2x+1)\right) \cdot \left(2xe^{x^2} \ln(2x+1) + \frac{2e^{x^2}}{2x+1}\right)\end{aligned}$$

2. *Soit $h(x) = e^{\sin(x^2+3x)}$. Cette fonction est la composée de trois fonctions dérivables sur leur domaine de définition :*
   — $f(x) = x^2 + 3x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$
   — $g(u) = \sin(u)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$
   — $k(v) = e^v$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$

   Par la Proposition 5.2.2, $h = k \circ g \circ f$ *est dérivable et :*
$$h'(x) = (2x+3) \cdot \cos(x^2+3x) \cdot e^{\sin(x^2+3x)}.$$

Corollaire 5.2.1. *Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable en $x_0 \in I$ telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :*
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Démonstration. On a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_I$. En dérivant cette composition en x_0 :
$$(f^{-1} \circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1$$
Donc :
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$
$\square$

Exemple. *Soit $f(x) = x^3 + 2$, qui est bijective sur $\mathbb{R}$ car continue et strictement croissante.*

Sa fonction réciproque est $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-2}$.
La dérivée de f est $f'(x) = 3x^2$.
Par le Corollaire 5.2.1, pour tout y dans l'image de f :
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{3\big(f^{-1}(y)\big)^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{y-2})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-2)^2}}.$$

5.3 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f.

Plus généralement on note :
$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad \text{et} \quad (f^{(n-1)})' = f^{(n)}$$
Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Théorème 5.3.1. *(Formule de Leibniz). Si f et g sont n fois dérivables en $x_0 \in I$, alors*
$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0).$$
Rappelons que le coefficient binomial est défini par :
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Démonstration. La preuve de la formule de Leibniz se fait par récurrence sur n en utilisant la relation de Pascal :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

$\square$

Exemple. *Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \ln(x) \cdot x^3$.*

On pose :

$$u(x) = \ln(x) \quad \textit{et} \quad v(x) = x^3$$

Calculons explicitement les dérivées successives de u :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) \\ u'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ u''(x) &= -x^{-2} \\ u^{(3)}(x) &= 2x^{-3} \\ u^{(4)}(x) &= -2 \cdot 3x^{-4} \end{aligned}$$

Par récurrence, on montre que pour $k \geq 1$:

$$u^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\, x^{-k}$$

Pour $v(x) = x^3$, on a :

$$\begin{aligned} v^{(0)}(x) &= x^3 \\ v^{(1)}(x) &= 3x^2 \\ v^{(2)}(x) &= 6x \\ v^{(3)}(x) &= 6 \\ v^{(k)}(x) &= 0 \quad \textit{pour } k \geq 4 \end{aligned}$$

Par la formule de Leibniz :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x)$$

Comme $v^{(k)}(x) = 0$ pour $k \geq 4$, seuls les termes $k = 0, 1, 2, 3$ contribuent :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) =& \binom{n}{0} u^{(n)}(x) v^{(0)}(x) + \binom{n}{1} u^{(n-1)}(x) v^{(1)}(x) \\ &+ \binom{n}{2} u^{(n-2)}(x) v^{(2)}(x) + \binom{n}{3} u^{(n-3)}(x) v^{(3)}(x) \end{aligned}$$

En substituant les expressions :

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) =& \binom{n}{0}(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\cdot x^3 \\
&+\binom{n}{1}(-1)^{n-2}(n-2)!\,x^{-(n-1)}\cdot 3x^2 \\
&+\binom{n}{2}(-1)^{n-3}(n-3)!\,x^{-(n-2)}\cdot 6x \\
&+\binom{n}{3}(-1)^{n-4}(n-4)!\,x^{-(n-3)}\cdot 6
\end{aligned}
$$

En simplifiant les puissances de x :

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) =& (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{3-n} \\
&+3n(-1)^{n-2}(n-2)!\,x^{3-n} \\
&+3n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!\,x^{3-n} \\
&+n(n-1)(n-2)(-1)^{n-4}(n-4)!\,x^{3-n}
\end{aligned}
$$

Finalement, pour $n \geq 4$:

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) = x^{3-n}\Big(&(-1)^{n-1}(n-1)! + 3n(-1)^{n-2}(n-2)! \\
&+3n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)! + n(n-1)(n-2)(-1)^{n-4}(n-4)!\Big)
\end{aligned}
$$

5.4 Extremums

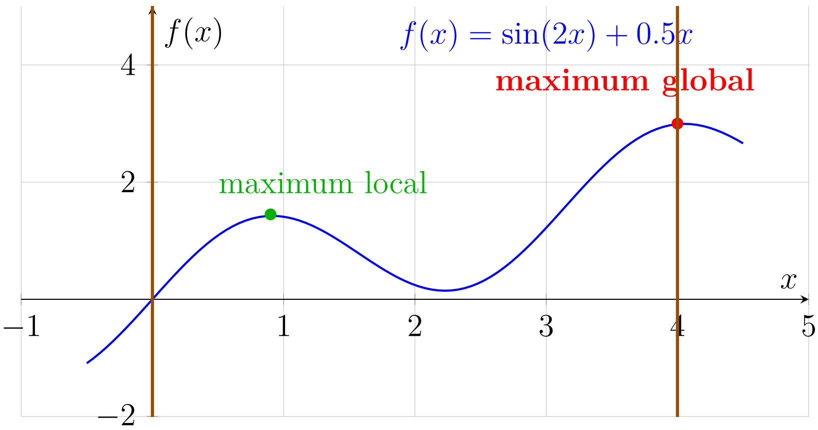
Définition 5.4.1. *(Point critique et extremum local). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$.*

1. *On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.*
2. *On dit que f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que :*
$$\forall x \in I \cap J, \quad f(x) \leq f(x_0)$$
3. *On dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que :*
$$\forall x \in I \cap J, \quad f(x) \geq f(x_0)$$
4. *On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.*

Définition 5.4.2. *(Extremum global). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$.*

1. *On dit que f admet un maximum global (ou absolu) en x_0 si :*
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$
2. *On dit que f admet un minimum global (ou absolu) en x_0 si :*
$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

3. *On dit que f admet un* extremum global *en x_0 si f admet un maximum global ou un minimum global en ce point.*



Théorème 5.4.3. *(Théorème de Fermat). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$.*

Si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local en x_0, alors :

$$f'(x_0) = 0.$$

Démonstration. Supposons que f admette un maximum local en x_0. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout h avec $|h| < \alpha$, on ait $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$.

Pour $h > 0$, on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

En passant à la limite quand $h \to 0^+$, on obtient $f'(x_0) \leq 0$.

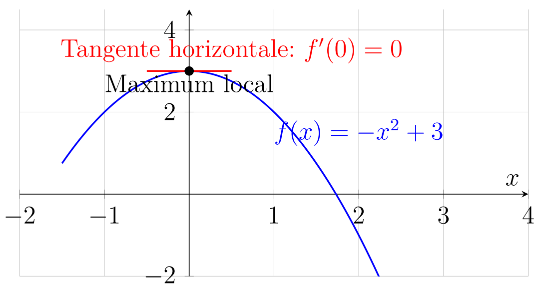
Pour $h < 0$, on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{(car le numérateur est } \leq 0 \text{ et le dénominateur } < 0\text{)}$$

En passant à la limite quand $h \to 0^-$, on obtient $f'(x_0) \geq 0$.

On conclut que $f'(x_0) = 0$.

Le cas d'un minimum local se démontre de manière analogue. □



5.5 Théorème de Rolle et Théorème des Accroissements Finis

Théorème 5.5.1. *(Théorème de Rolle) Soit f une fonction telle que :*

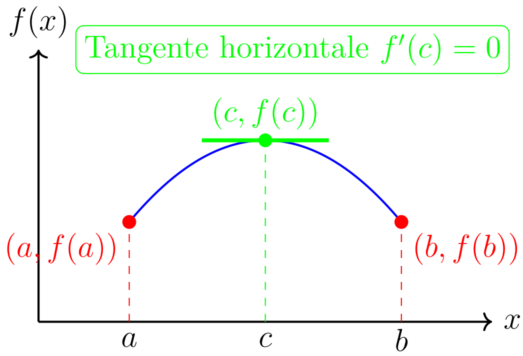
(i) f *est continue sur* $[a, b]$

(ii) f *est dérivable sur* $]a, b[$

(iii) $f(a) = f(b)$

Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ *tel que :* $f'(c) = 0$.

- **Interprétation géométrique**



Exemples.

1. *Soit* $f(x) = x^2 - 4x + 3$ *sur* $[1, 3]$.
   - f *continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$
   - $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$, $f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$
   - $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \in]1, 3[$

   Le point $c = 2$ *vérifie* $f'(2) = 0$.
2. $f(x) = |x|$ *sur* $[-1, 1]$
   - f *est continue sur* $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1) = 1$
   - *Mais* f *n'est pas dérivable en* 0
   - *Le théorème ne s'applique pas.*

Théorème 5.5.2. *(Théorème des accroissements finis). Soit f une fonction telle que :*

(i) f *est continue sur* $[a, b]$

(ii) f *est dérivable sur* $]a, b[$

Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ *tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration. On va démontrer ce théorème en s'appuyant sur le théorème de Rolle.

Considérons la fonction auxiliaire g définie sur $[a, b]$ par :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Vérifions que g satisfait les hypothèses du théorème de Rolle :

1. **Continuité** : g est continue sur $[a,b]$ car f est continue sur $[a,b]$.
2. **Dérivabilité** : g est dérivable sur $]a,b[$ car f est dérivable sur $]a,b[$ et la fonction affine est dérivable.
3. **Valeurs aux bornes** :

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(a) - (f(b)-f(a)) = 0$$

Donc $g(a) = g(b) = 0$.

Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Calculons la dérivée de g :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Puisque $g'(c) = 0$, on a :

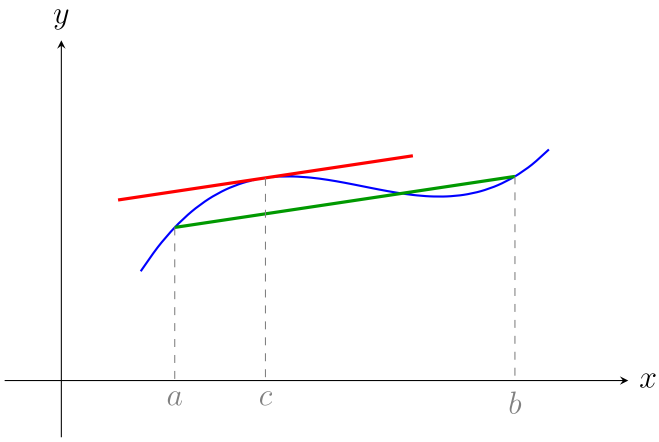
$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

D'où :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

• **Interprétation géométrique :** Il existe un point c où la tangente est parallèle au segment joignant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$.



Exemple. *Montrer que* $|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$, *pour tous réels* a *et* b.
On considère la fonction $f(x) = \sin x$.
La fonction $f(x) = \sin x$ *est :*

— ***Continue*** *sur* $\mathbb{R}$ *(donc sur tout intervalle* $[a,b]$*)*
— ***Dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$ *(donc sur tout intervalle* $]a,b[$*)*
— *Sa dérivée est* $f'(x) = \cos x$

*Les hypothèses du **théorème des accroissements finis** (TAF) sont donc satisfaites sur tout intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$).*

D'après le TAF, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Soit :

$$\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos c.$$

En prenant la valeur absolue des deux membres :

$$\left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| = |\cos c|$$

Or, pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\cos c| \leq 1$$

Donc :

$$\left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| \leq 1$$

En multipliant les deux membres par $|b - a|$ (qui est positif) :

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|.$$

Corollaire 5.5.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

1. *Si $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante sur $[a, b]$.*
2. *Si $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0 \iff f$ est décroissante sur $[a, b]$.*
3. *Si $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0 \iff f$ est constante sur $[a, b]$.*
4. *Si $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.*
5. *Si $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.*

Démonstration.

1. $\Rightarrow$) : Soient $x_1, x_2 \in [a, b]$ avec $x_1 < x_2$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[x_1, x_2]$, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Comme $f'(c) \geq 0$ et $x_2 - x_1 > 0$, on a $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, donc f est croissante.

$\Leftarrow$) : Réciproquement, supposons que f est croissante. Fixons $x \in]a, b[$. Pour tout $y > x$ nous avons $y - x > 0$ et $f(y) - f(x) \geq 0$, ainsi le taux d'accroissement vérifie

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

À la limite, quand $y \to x$, ce taux d'accroissement tend vers la dérivée de f en x et donc $f'(x) \geq 0$.

Les autres cas se démontrent de manière similaire. □

Remarque. *La réciproque de (4) et (5) n'est pas toujours vraie. Par exemple, la fonction* $f(x) = x^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *mais sa dérivée* $f'(0) = 0$.

Corollaire 5.5.4. *(Règle de L'Hôpital pour la forme indéterminée $\frac{0}{0}$). Soit I un intervalle ouvert contenant $a \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies sur $I \setminus \{a\}$ telles que :*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
2. *f et g sont dérivables sur $I \setminus \{a\}$*
3. $g'(x) \neq 0$ *sur* $I \setminus \{a\}$.
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ *où* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Remarques.

1. ***Extension aux autres formes indéterminées*** *:*
   - ***Forme*** $\frac{\infty}{\infty}$ *: Un corollaire similaire existe lorsque* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.
   - *Le résultat vaut pour* $x \to a^+$ *et* $x \to a^-$
   - ***Limites infinies*** *: Le résultat s'étend aux cas* $x \to +\infty$ *et* $x \to -\infty$
2. *Si le quotient* $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *présente à son tour une forme indéterminée* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$*, et si les hypothèses sont vérifiées pour les dérivées successives, on peut appliquer itérativement la règle :*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots$$

Exemples.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\sin x}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$
5. *Pour tout entier* $n \geq 1$ *:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$$

6. *Calculons* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x} \right)$.

   On a pour $x > 0$ *:*

$$x - \sqrt{x^2 - x} = x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

   Posons $t = \frac{1}{x}$*, alors quand* $x \to +\infty$, $t \to 0^+$ *:*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x} \right) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1 - \sqrt{1 - t}}{t}$$

Cette limite est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Appliquons la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1-\sqrt{1-t}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-t}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-x}\right) = \frac{1}{2}$$

5.6 Formules de Taylor

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.

Définition 5.6.1. *(Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ si :

i) f *est* n *fois dérivable sur* I

ii) $f^{(n)}$ *est continue sur* I.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ si f est continue sur I.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 5.6.2. *(Formule de Taylor-Lagrange).*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ et soit $a, x \in I$. Il existe un réel c entre a et x tel que :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

- La somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ représente le polynôme de Taylor de degré n noté $T_n(x)$ de f au point a. Ce polynôme approxime localement la fonction f au voisinage de a.
- Le terme $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ appelé reste de Lagrange quantifie l'erreur d'approximation commise lorsqu'on remplace $f(x)$ par son polynôme de Taylor.
- **Interprétation :** La formule montre que toute fonction suffisamment régulière peut être localement approchée par un polynôme, avec une erreur contrôlée par la dérivée d'ordre supérieur.

Exemple. *Formule de Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle à l'ordre n :*

La fonction $x \mapsto f(x) = e^x$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I = \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Fixons $a \in \mathbb{R}$. Comme $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $\ldots$, $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe c entre a et x tel que :

$$e^x = e^a + e^a \cdot (x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n + \frac{e^c}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

En particulier, si l'on se place en $a = 0$, on retrouve le développement de la fonction exponentielle en $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{5.2}$$

Si $a = 1$, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n s'écrit

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \cdots + \frac{e}{n!}(x-1)^n + \frac{e^c}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}.$$

Dans la plupart des cas on ne connaîtra pas la valeur de c. Cependant, il est possible d'encadrer la différence entre la fonction et son polynôme de Taylor T_n. Ceci s'exprime par le corollaire suivant :

Corollaire 5.6.3. *Si en plus la fonction $|f^{(n+1)}|$ est majorée sur I par un réel M, alors pour tout $a, x \in I$, on a :*

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. Immédiate à partir de la formule de Taylor-Lagrange (5.1). □

Exemple. *Approximation de* exp(0, 01).

Soit $f(x) = exp(x) =: e^x$. La formule de Taylor (5.2) en $a = 0$ à l'ordre 3 devient :

$$f(x) = 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(c)x^4}{4!},$$

c'est-à-dire $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^c x^4}{24}$, pour un certain c entre 0 et x.

Appliquons ceci pour $x = 0,01$. Le reste étant petit on trouve alors :

$$\exp(0,01) \approx 1 + 0,01 + \frac{(0,01)^2}{2} + \frac{(0,01)^3}{6} = 1,01005016666...$$

On peut même savoir quelle est la précision de cette approximation : comme $f^{(4)}(x) = e^x$ alors pour $c \in [0, 0,01]$, on a $|f^{(4)}(c)| \leqslant e^{0,01} \leqslant 2$. Donc :

$$\left|f(x) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\right| \leqslant 2 \cdot \frac{x^4}{24}.$$

Pour $x = 0,01$ cela donne :

$$\left|\exp(0,01) - \left(1 + 0,01 + \frac{(0,01)^2}{2} + \frac{(0,01)^3}{6}\right)\right| \leqslant \frac{(0,01)^4}{12}.$$

Comme $\frac{(0,01)^4}{12} < 10^{-9}$, alors notre approximation donne au moins 8 chiffres exacts après la virgule.

Théorème 5.6.4. *(Formule de Taylor-Young). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction définie sur I telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Notation. *Le terme* $(x-a)^n\varepsilon(x)$ *où* $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$ *appelé reste de Young est souvent abrégé en « petit o » (le symbol de Landau) de* $(x-a)^n$ *et est noté* $o((x-a)^n)$.

Ainsi, $o((x-a)^n)$ *désigne une fonction telle que :*

$$\lim_{x\to a}\frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0.$$

Remarque. *Lorsque le point de développement est* $a = 0$*, la formule de Taylor prend le nom de Formule de Maclaurin.*

Pour une fonction f *de classe* $\mathcal{C}^n$*, la formule de Maclaurin-Young à l'ordre* n *s'écrit :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Exemples.

1. *Ecrire la formule de Maclaurin-Young des fonctions* sin *et* cos.

   Dérivées successives de $\sin(x)$ *:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) = \sin\left(x + 0\cdot\frac{\pi}{2}\right) & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos(x) = \sin\left(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right) & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\sin(x) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) & f''(0) &= 0\\
f^{(3)}(x) &= -\cos(x) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right) & f^{(3)}(0) &= -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin(x) = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right) & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

   Dérivées successives de $\cos(x)$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \cos(x) = \cos\left(x + 0\cdot\frac{\pi}{2}\right) & g(0) &= 1\\
g'(x) &= -\sin(x) = \cos\left(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right) & g'(0) &= 0\\
g''(x) &= -\cos(x) = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) & g''(0) &= -1\\
g^{(3)}(x) &= \sin(x) = \cos\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right) & g^{(3)}(0) &= 0\\
g^{(4)}(x) &= \cos(x) = \cos\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right) & g^{(4)}(0) &= 1
\end{aligned}$$

   On démontre par récurrence sur n *que les dérivées* n*-ième de* sin *et* cos *s'écrivent :*

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

   Formule de Maclaurin-Young à l'ordre n

Pour $\sin(x)$ *à l'ordre* $n = 2p+1$ *:*

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1} + x^{2p+1}\varepsilon(x)}$$

Pour $\cos(x)$ *à l'ordre* $n = 2p$ *:*

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p} + x^{2p}\varepsilon(x)}$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$

Formule de Maclaurin-Young de $\sin$ *à l'ordre* 5 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)$$

Formule de Maclaurin-Young de $\cos$ *à l'ordre* 4 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ *dans les deux cas.*

2. *Formule de Maclaurin-Young de* $\sqrt{1+x^2}$ *à l'ordre 5 :*

Dérivées successives (calculées en 0**)** *: soit* $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+x^2} & f(0) &= 1\\
f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & f'(0) &= 0\\
f''(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} & f''(0) &= 1\\
f^{(3)}(x) &= -\frac{3x}{(1+x^2)^{5/2}} & f^{(3)}(0) &= 0\\
f^{(4)}(x) &= \frac{12x^2-3}{(1+x^2)^{7/2}} & f^{(4)}(0) &= -3\\
f^{(5)}(x) &= -\frac{60x^3-45x}{(1+x^2)^{9/2}} & f^{(5)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

En utilisant les valeurs calculées ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x^2} &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + x^5\varepsilon(x)\\
&= 1 + 0\cdot x + \frac{1}{2}x^2 + 0\cdot x^3 + \frac{-3}{24}x^4 + 0\cdot x^5 + x^5\varepsilon(x)\\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^5\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Ou encore

$$\boxed{\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)}.$$

3. *Calculer la limite suivante en utilisant la formule de Maclaurin-Young à un ordre convenable*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Formule de Maclaurin-Young pour e^x *à l'ordre 2 :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Substitution :

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right) - 1 - x}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x)\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}}.$$

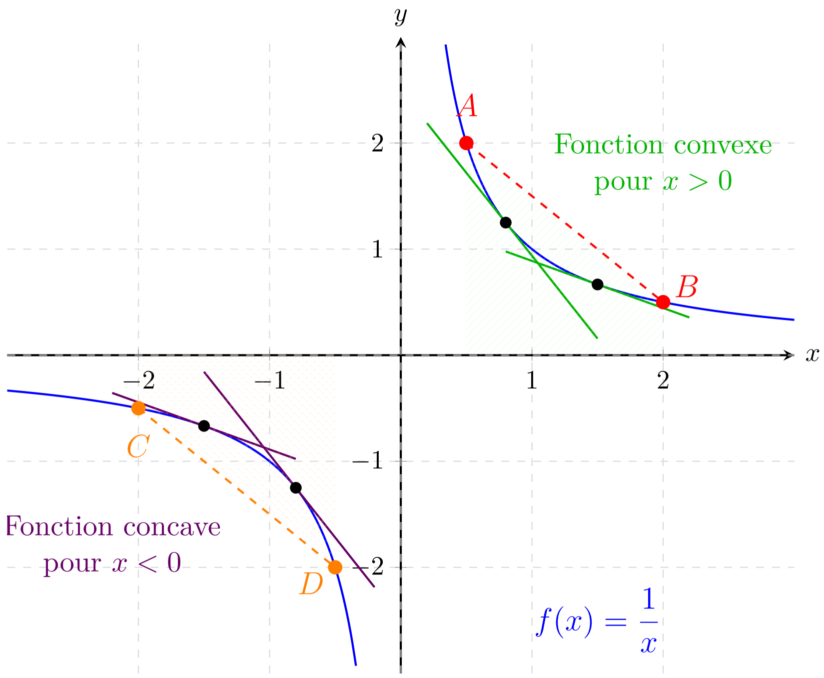
5.7 Convexité d'une courbe

Définition 5.7.1. *(Critère géométrique).*

- *Une fonction est convexe sur un intervalle si sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle.*
- *Une fonction est concave sur un intervalle si sa courbe est située au-dessous de toutes ses tangentes.*
- *Les deux notions se caractériseent aussi de la manière suivante : une fonction est convexe si le segment entre deux points de sa courbe est au-dessus de la courbe, et concave si le segment est en dessous.*

Proposition 5.7.1. *(Critère analytique).*

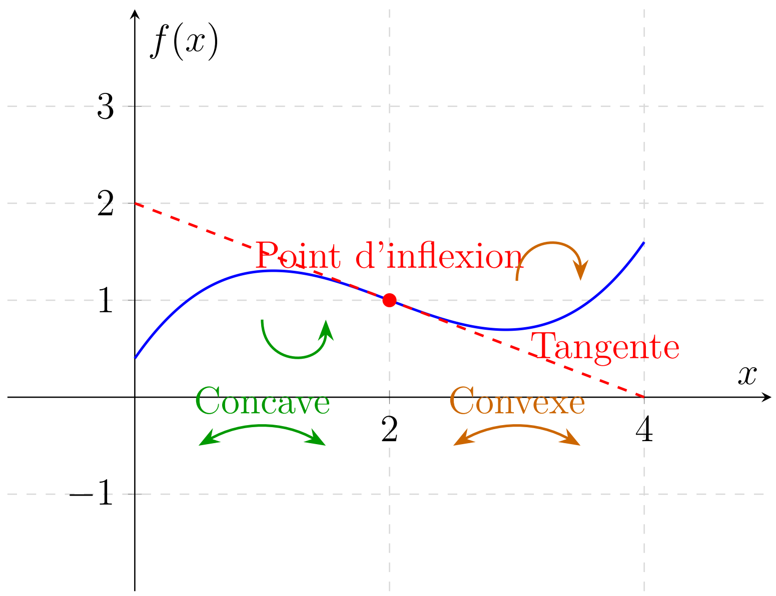
$$\begin{cases} f''(x) > 0 \text{ sur } I \Rightarrow f \text{ est convexe sur } I \\ f''(x) < 0 \text{ sur } I \Rightarrow f \text{ est concave sur } I \end{cases}$$



5.8 Point d'inflexion

Définition 5.8.1. *Si f est deux fois dérivable sur I : x_0 est point d'inflexion si f'' change de signe en x_0. Autrement dit, un point d'inflexion est un point où la courbe change de convexité (de convexe à concave ou inversement).*

- En un point d'inflexion x_0, la courbe traverse sa tangente.
- La tangente en un point d'inflexion est appelée tangente d'inflexion.



Exemple. *Soit* $f(x) = -2x^3 + 6x^2$.

On a $f'(x) = -6x^2 + 12x, \quad f''(x) = -12x + 12, \forall x \in \mathbb{R}.$

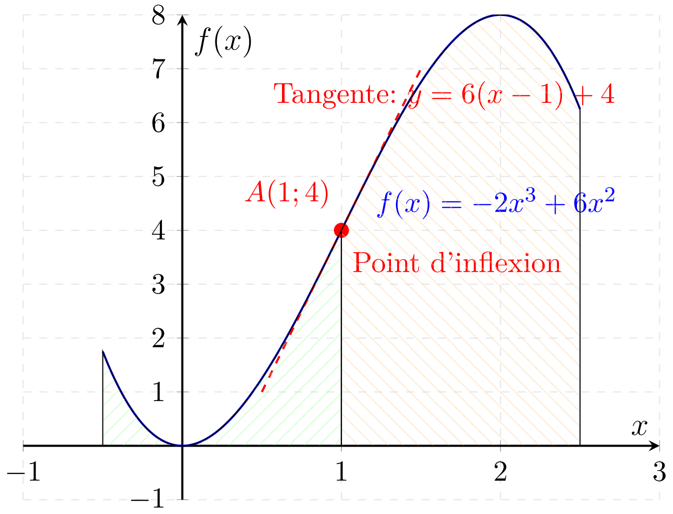
Signe de f'' :

$$\begin{aligned} &f''(x) > 0 \text{ pour } x < 1 \quad (\textit{convexe}) \\ &f''(x) = 0 \text{ pour } x = 1 \\ &f''(x) < 0 \text{ pour } x > 1 \quad (\textit{concave}) \end{aligned}$$

D'où

f est convexe sur $]-\infty, 1]$ et concave sur $[1, +\infty[$.

La courbe représentative admet donc un point d'inflexion en $A(1;4)$.



5.9 Asymptote d'une courbe

Définition 5.9.1. *Une asymptote est une droite dont la courbe se rapproche indéfiniment sans jamais (ou rarement) la toucher.*

- **Types d'asymptotes :**

  Asymptote verticale : $x = a$: se produit quand $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$

  Asymptote horizontale : $y = \ell$: se produit quand $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$

  Asymptote oblique : $y = ax + b$: se produit quand $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

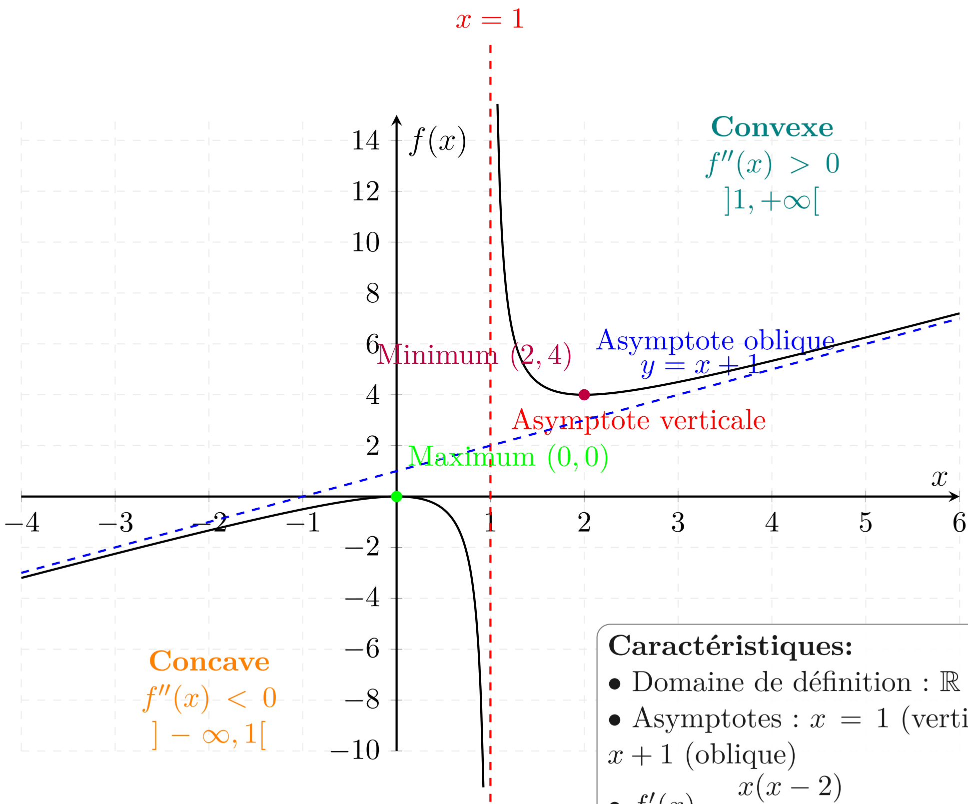
- **Construction du graphe d'une fonction**

1. **Domaines d'étude**
   — Domaine de définition
   — Parité, périodicité (réduction du domaine)
2. **Limites et asymptotes**
   — Aux bornes du domaine
   — Recherche d'asymptotes
3. **Dérivée première**
   — Calcul de $f'(x)$
   — Signe de $f'(x)$ et tableau de variations

— Extremums locaux

4. **Dérivée seconde**
   — Calcul de $f''(x)$
   — Signe de $f''(x)$ et tableau de convexité
   — Points d'inflexion
5. **Points particuliers**
   — Intersections avec les axes
   — Valeurs remarquables
6. **Tracé de la courbe**
   (a) Placer les asymptotes (en pointillés)
   (b) Marquer les points particuliers
   (c) Tracer selon les variations et convexités
   (d) Vérifier la cohérence avec les limites

Exemple. *Pour* $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ *:*



Caractéristiques:
• Domaine de définition : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
• Asymptotes : $x = 1$ (verticale), $y = x + 1$ (oblique)
• $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
• $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$
• Variations : $\nearrow$ sur $]-\infty, 0]$, $\searrow$ sur $[0, 1[$, $\searrow$ sur $]1, 2]$, $\nearrow$ sur $[2, +\infty[$
• Concave sur $]-\infty, 1[$, convexe sur $]1, +\infty[$
• Pas de point d'inflexion